马尔可夫过程和今日数学

编写著者：王梓坤
责任编辑：胡海清
出版发行：湖南科学技术出版社
社　　址：长沙市展览馆路66号
　　　　　http://www.hnstp.com
邮购联系：本社服务一部 0731—4441720
印　　刷：湖南省新华印刷二厂
　　　　　（印装质量问题请直接与本厂联系）
厂　　址：邵阳市双坡岭
邮　　编：422001
经　　销：湖南省新华书店
出版日期：1999年4月第1版第1次
开　　本：850mm×1168mm　1/32
印　　张：14.25
插　　页：6
字　　数：359000
印　　数：1～1100
书　　号：ISBN 7-5357-2517-1/O·170
定　　价：35.00元

序

PREFACE

我以菲材，侧身于数学教育与研究行列，凡四十年，用功甚勤，而所获无多．今承湖南科学技术出版社及胡海清先生鼎力促成，出此一书．掩卷自思，惶愧顿生．虽然，亦略有所感．

举凡科学研究，三分选题，三分勤毅，二分机遇，二分天赋．四者具备，必成上品．其实何止科研，一切大事，莫不如此．选题靠师友交流，靠信息通畅，靠个人胆识．勤奋与毅力则出乎自身之理想、兴趣、热情与自制．机遇寓于环境遭逢及人际关系之中，有驾而上者，有溺而沉

者，全在有所准备，及时抓住或避免. 天赋与生俱来，难以改变，但用我之长，避我之短. 我善用我，则可自择也. 今我四者，皆居中游. 无怪其斯为下矣. 前车之鉴，不敢自秘，谨奉告以闻.

华年已去，来日尚多. 此书之完成，实为一科研段落，但仍不敢稍有疏怠. 抚今思昔，启我数学之蒙者，为武汉大学数学系诸师长；而书中主要工作，则完成于莫斯科大学、南开大学、北京师范大学与汕头大学. 老师指教与同事间多年切磋互助，有益哉！有味哉！长在美好记忆之中矣.

为将余之诸论文加工整理成此内容系统、结构完整之书，杨向群教授独挑大梁，妙思增彩. 书中"编者的话"；全书疏通、导读及说明；关于各篇的注及索引；若干篇原用俄文、英文发表，今译成中文；以至最后定稿成书，皆出其手. 导读有助于了解来龙去脉，有益于提高可读性，此所以本书区别于一般文集者. 创此新意，用心良苦，工作量之大，非片言感谢可尽也. 吴荣、刘文、李志阐、施仁杰、胡国定、邓汉英、刘泽华、李占柄、曾祥金诸教授，内子谭得伶教授，数十年如一日，相濡以沫，情谊长青，未识相轻相妒之害，诚人生之大幸也. 众多弟子，青出于蓝，教师清苦，以此足可自慰，常书"喜看新鹰(莺)出春林，百年树人亦英雄"于座右，以为自勉. 尤忆50年代初期，我国学界几不知概率论为何物；领我入门者为导师 A. H. Колмогоров 院士与 P. Л. Добрушин 教授，而后者面授尤多，中心藏之，何日忘之，惜乎仙去，报师无门矣. 可喜者，近年来我国概率学界，成果灿然，人才辈出，数学大国强国，如旭日东升，辉辉煌煌，举头可望矣.

王梓坤 1997年9月1日于南开园

编者的话

EDITOR'S WORDS

一

作为中国科学院院士王梓坤教授早年的学生，我们非常荣幸地协助敬爱的老师编辑这本数学著作．王老师为我国的数学科学事业、高等教育事业、科学普及事业奋斗了几十年，作出了卓越的贡献．他于1929年4月30日出生于江西省吉安县一个贫苦的农民家庭，幼时的求学

历程是贫困坎坷磨难的，但他以顽强的毅力，勤奋好学的天性，优异的学业成绩，朴实诚恳的品行，赢得了老师和亲友的同情、关心、爱护和帮助，终于走完了极其艰辛的小学、中学旅程，跨进了武汉大学的校门．在大学中，他如鱼得水，在知识的海洋中尽情遨游．大学毕业时，新中国刚成立，给他提供了报效祖国的极好机遇，他被分配到南开大学数学系任教．尔后，他考取了留学苏联的研究生，在世界著名学府莫斯科大学攻读概率论．1958 年，他学成回国并仍在南开大学任教．他满腔热情地全身心地致力于教学和科研工作，他为在我国传播当时在国内几乎还是空白的概率论学科铺路，他身体力行地向概率论的广度和深度进军，他辛勤地培养、造就概率论的教学和研究队伍，他要让概率论为我们的国家和人民造福．

王老师是将马尔可夫过程引入我国的先行者．他在莫斯科大学学习期间，表现出非凡的才华．他的副博士论文彻底地解决了生灭过程的构造问题，也就是说，他找出了全部的生灭过程．更为重要的是，他创立了马尔可夫过程构造论中的一种崭新的方法——概率方法，亦称过程轨道的极限过渡法．这个新方法在用过程的轨道研究过程的性质时显示出很大的优越性．他在概率论研究的许多方向上都作出了重要的、出色的工作．从苏联学成回国后，他就为青年教师和本科生开设概率论基础及其应用的课程．他 30 岁起就开始带研究生，为我国培养出许多高水平的概率论专家．他的四本著作《概率论基础及其应用》、《随机过程论》、《生灭过程与马尔可夫链》、《布朗运动与位势》，从概率论的基础写起，一直写到近代专题研究的前沿．这四本著作既总结了王老师本人、同事们、同

行们、学生们在概率论的教学和研究中的一些成果，又为在我国传播、推动概率论学科，培养我国概率论的教学和研究人才，起了非常重要的作用，哺育了我国的几代概率论学人（这四部著作于1996年由北京师范大学出版社再版，书名为：《概率论基础及其应用》、《随机过程通论》上、下卷）．王老师在研究数学的同时，还写了大量的关于科学普及、关于科学研究方法、关于自学与成才等方面的文章和著作．王老师的科普著作《科学发现纵横谈》、《科学发现纵横谈新编》、《科海泛舟》，以其鲜明的观点，深刻而精辟的见解，丰富的知识，独特清新的笔调，赢得了国内外广大读者的赞誉，并多次获得嘉奖．王老师在任北京师范大学校长期间，提出“尊师重教”，提出教师“百年树人亦英雄”，建议设立“教师节”等等，表达了他对教师这一崇高的神圣职业的高度颂扬、崇敬和热爱．王老师曾获全国科学大会奖，全国自然科学奖，国家教委科学技术进步奖，全国新长征优秀科普作品奖，曾宪梓教育基金会全国师范院校教师奖等多种奖项．他三次被评为天津市劳动模范，被评为建国以来成绩突出的科普作家，被授予国家有突出贡献专家称号，被澳大利亚麦克里（Macquarie）大学授予荣誉科学博士学位，被列入世界名人录．1991年，王老师被选为中国科学院学部委员（院士），这是对王老师几十年来在概率论研究中作出的突出贡献的高度评价和肯定．

二

本书对王老师在1998年以前发表的部分数学论文

及其他有关论文进行深入加工整理，编辑成一本内容系统，结构完整的书. 论文的内容基本上代表了王老师在各个时期的数学研究成果. 我们将它分为三个层次：第一层次是王老师对数学的一个专门分支，主要是对马尔可夫过程的研究（第 1 至 4 卷）. 第二层次是王老师对历史上长期争论的一些概念和问题如随机性（偶然性）. 必然性、混沌的独到的哲学见解（第 5 卷）. 第三层次是站在所有数学专门分支之上对整个数学，特别是今日数学的新认识（第 6 卷）.

随着时代的前进，特别是随着国际上概率论研究的进展，王老师的研究课题也在变化. 这些课题都是当时国际上概率论前沿研究的重要方向. 王老师始终紧随学科的近代发展步伐，力求在科学研究的重要前沿，开荒辟地，作出崭新的开创性的成果，以带动国内一批学者在刚开垦的荒地上辛勤耕耘. 这是王老师的数学研究的一个重大特色.

50 年代末至 60 年代，王老师主要研究生灭过程的构造和它的积分型泛函的分布. 差不多在同时，W. Feller 用纯分析方法研究了生灭过程的构造，其论文发表于 1959 年，但只构造了一部分生灭过程. 1958 年，王老师发表了论文“全部生灭过程的分类”，构造了全部的生灭过程，所用的方法是由王老师首创的概率方法——过程轨道的极限过渡法. 在此基础上，王老师又首创差分方法，尔后又用递推方法，以研究生灭过程的泛函分布和其他性质. 在这一时期，他还发表了另一交叉课题的论文《随机泛函分析引论》. 这是国内较系统地介绍、论述、研究随机泛函分析的第一篇文章. 现在，这一方向在国内的

研究很活跃，并且取得了丰硕的成果.

60年代初，王老师还将原苏联数学家E. Б. Дынкцн（后来移居美国并成为美国科学院院士）的书《马尔可夫过程论基础》译成中文出版，该书总结了当时的苏联概率论学派在马尔可夫过程论研究方面的新成就，推动了我国对马尔可夫过程的研究.

60年代后期，王老师研究一般马尔可夫过程的通性，如零壹律，常返性，Martin边界与过份函数等. 其中一个有趣的结果是：对于某些马尔可夫过程，过程常返等价于此过程的每一个有限的过份函数是常数；而过程的强零壹律成立等价于过程的每一个有界调和函数是常数. 后来，西方同行也得到类似的结果.

70年代，由于众所周知的原因，王老师停下理论研究而转向数学的实际应用. 主要是从事地震统计预报和在计算机上模拟随机过程. 他和同事们首创了"地震的随机转移预报方法"和"利用国外大震以报国内大震的相关区方法"，取得了实际效果，也发表了一些实际应用方面的论文. 作为代表，我们选了与本书其他各篇风格相近的第15篇编入.

80年代初，马尔可夫过程与位势理论的关系在国际上是热门课题. 王老师的研究工作放在布朗运动与古典位势方面，发表了一系列论文. 特别地，他求出了自原点出发的$d(\geqslant 3)$维布朗运动末离球的时间的分布. 这是一个新发现的概率分布，在此之前尚未见到过. 这个分布的形式很简单. R. K. Getoor也独立地得到同样的结果. 此外，王老师还证明了：从原点出发的布朗运动对于球面的首中点分布和末离点分布是相同的，它们都是球面上的

均匀分布. 这一结果有很强的直观解释：由于布朗运动的“对称性”和球面的对称性，首中点是球面上的均匀分布是易于理解的；但如果把时间倒逆，从原点出发的布朗运动就变成从无穷远点出发的布朗运动了，以原点为中心的球面也可以看成是以无穷远点为中心的球面，原先的末离就变成首中了. 既然首中点有球面上的均匀分布，那么末离点也应当有球面上的均匀分布了.

80年代后期，王老师研究多参数马尔可夫过程. 他关于多参数马尔可夫过程的开创性的研究工作，掀起和推动了国内对于多参数马尔可夫过程的研究. 他的主要工作是最早引进多参数 d 维（及无穷维）Ornstein-Uhlenbeck 过程（OUP_n^d，OUP_n^∞）的定义并研究其性质. 这类过程后来引起一些人的兴趣，从而出现许多研究这类过程的论文，并取得了深刻的结果. 湖南科技出版社 1996 年出版的杨向群、李应求的专著《两参数马尔可夫过程论》，就是在王老师开垦的荒地上耕耘出来的.

90年代初，王老师和他的同事以及研究生对国际上的重要新课题——“超过程”——发生了浓厚的兴趣，并取得一些成果. 特别是他的年青的同事和学生们做了许多很好的工作，有的达到国际前沿水平. 与此同时，王老师对哲学中一些基本问题，如偶然性、必然性、混沌之间的关系，也有浓厚的兴趣，发表了一些很有见地的论文.

特别值得提出的是，王老师不仅对数学的专门方向和马尔可夫过程有深入的研究和贡献，对一些哲学问题有独到的见解，而且对整个数学，特别是今日数学，也有精辟的、正确而全面的认识. 因此，我们把王老师受中国科学院数学物理学部的委托，撰写的《今日数学及其应

用》也编入本书. 该文赢得了广泛而众多的读者的欢迎，使人们对今日数学的特点和状况，及其在国家富强中的作用，有了更全面、更深刻、更明确、更近代的了解；更加深刻地感受到，数学的发展是一件国家大事，今日数学在自然科学、社会科学、高新技术中的重要地位和作用，在各个领域中的广泛应用，以及在推动生产力发展和国富民强中的重大作用. 文章中正确、新颖观点，丰富、实际的事例，清新、明快的笔调，形象、生动的语言，使读者阅读后感到是一种高级的享受.

三

以俄国数学家 A. A. Марков 的名字命名的随机过程，王梓坤老师于 1958 年首次将它引入我国时，译为马尔科夫过程。后来国内一些学者也称为马尔可夫过程，马尔柯夫过程，Markov 过程，甚至简称为马氏过程. 现在国家统一规范为马尔可夫过程，或直接用 Markov 过程.

在编辑本书的过程中，我们较全面地了解到王老师对马尔可夫过程在中国的引入、传播和研究中所作出的贡献，更深刻地了解到我们的老师做了这么多开创性的、高水平的成果，为我国的科学和教育事业作出了如此巨大的贡献！王老师的著述是丰富的，除了数学论文外，还有大量的关于科学普及、科学研究方法及其他方面的文章. 借此机会，我们向王老师取得的成就表示庆贺！同时，我们这些有幸得到王老师直接教诲的学生们，再次向老师表示衷心的感谢. 今年 4 月 30 日，是王老师的寿辰. 我们祝王老师健康长寿！

本书的出版得到湖南科学技术出版社的大力支持.出版社领导非常重视和关心本书的出版.编审胡海清先生从本书的策划，具体的编排，到文字的推敲和校对，都作了巨大的努力.我们向湖南科学技术出版社和胡海清先生表示深挚的谢意.

湖南岳阳宾馆的领导刘文一、刘飞龙等领导和职工得知我们正在编辑著名数学家和科普作家、中国科学院院士的书，表现出极大的热情，为我们提供了优越的工作环境和热情周到的服务.我们在岳阳宾馆高高的楼层上，抬头望见碧波荡漾的洞庭湖和被誉称为白银盘里一青螺的君山岛，心旷神怡，工作效率极高.岳阳市是湘北明珠，是范仲淹千古名篇“岳阳楼记”描述的地方.我们感谢岳阳宾馆的同志们，对他们尊重科学、尊师重教的精神表示钦佩！

本书还得到许多人士多方面的支持和帮助.我们向罗守军、葛余博、张健康、陈雄、王弘、赵志如、张春生、王永进、张新生、郭军义、赵学雷、叶俊、李增沪、欧庆岭、鲍玉芳、唐加山、洪文明、坚雄飞、陈兰惠等先生和女士们表示感谢！

本书编辑小组

杨向群　吴荣

刘文　施仁杰

李三阑　胡海清

1999年4月

编辑小组

杨向群　吴　荣　刘　文　施仁杰　李志阐　胡海清



Wang Zikun

王梓坤，1929年4月30日生于湖南省零陵县，在湖南衡阳发蒙，后回到江西省吉安县继续读书。高中毕业后，1948年在湖南长沙考取了武汉大学数学系。现任北京师范大学数学系、汕头大学数学所教授，博士生导师，中国科学院院士，他是一位对我国的教育事业和科学事业作出卓越贡献的数学家和教育家。王梓坤于1952年武汉大学数学系毕业，然后在南开大学工作32年，1984至1989年任北京师范大学校长。1958年在莫斯科大学获得副博士学位。1988年获澳大利亚麦克里大学名誉科学博士学位。1981年任美国康奈尔大学访问教授。王梓坤是将马尔可夫过程研究引入我国的先行者，一生致力于马氏过程的研究，论文多具开创性，成果甚多，著作甚丰，除论文外，数学方面的著作有:《概率论基础及其应用》，《随机过程论》，《生灭过程与马尔科夫链》、《概率统计预报》，《布朗运动与位势》，王梓坤在科学方法论和科普方面发表许多文章，著有《科学发现纵横谈》，《科海泛舟》。王梓坤三次被评为天津市劳动模范，被授予“国家有突出贡献专家”，“建国以来成绩突出的科普作家”，曾获国家自然科学奖，国家教委科技进步奖，全国新长征优秀科普作品奖，曾宪梓教育基金会全国师范院校教师奖等多种奖项。

王梓坤

• 目录 •

•CONTENTS•

第 I 卷

生灭过程理论

本卷研究生灭过程的构造、性质及应用．这里的生灭过程具有保守的密度矩阵，状态 0 是反射壁，而且是不中断的．本卷含第 1 篇至第 7 篇共 7 篇．生灭过程是在理论上非常重要、在实际中应用非常广泛的一类随机过程．第 7 篇是综述性的，综述了中国数学家包括作者本人对生灭过程理论的新贡献．

第 1 篇、第 2 篇、第 3 篇是作者在莫斯科大学的副博士学位论文的主要内容．第 1 篇是主要内容的摘要．前苏联概率论专家 A. A. Юшкевцч 教授引用第 1 篇文章时写道："W. Feller 用分析方法构造了生灭过程的不同延拓，……同时王梓坤构造了全部的延拓，……"．换句话说，当最小解中断时，Feller 只找出了一部

分生灭过程，而作者找出了全部的生灭过程，从而彻底地解决了生灭过程的构造问题．第 2 篇详细地阐述了由作者独创的，并且非常成功地解决了生灭过程构造问题的、构造论的概率方法——过程轨道的极限过渡法——的逻辑基础．在这之前，马尔可夫过程构造论中使用的方法基本上是分析的方法（包括半群方法）．分析方法有其优点，它可以充分地运用例如泛函分析等的结论和工具，但它缺乏、甚至没有概率的直观．而极限过渡法的特点是着眼于过程的样本轨道，因而具有较强的概率直观．该方法的特点是把一般过程的轨道变换为结构比较简单的 Doob 过程的轨道；反过来，用 Doob 过程的轨道通过极限过渡而得到一般的过程的轨道．这个方法带来很大的好处，为了研究一般过程的某些概率性质，可以先研究较简单的 Doob 过程的性质，然后再极限过渡．例如，第 4 篇研究生灭过程的遍历性和零壹律，就是按上述程序进行的．第 3 篇论及一个生灭过程，即第 1 篇定理 2 中数列 $v_n\equiv 1(n=1,2,\cdots)$ 所对应的过程，也是第 2 篇基本定理 2 中的特征数列 $p=1$，$q=0$，$r_n=0$ $(n=1,2,\cdots)$ 所对应的过程，还是第 2 篇定理 7.2 中的过程．这个过程是在最小解中断时唯一的满足向前方程组的过程（由于假定了密度矩阵保守，生灭过程一定满足向后方程组）．这个过程有概率直观：当过程到达"∞"后，它从"∞""连续地"回到有限状态上来．而 Doob 过程的概率直观是：当过程到达"∞"后，它按某个概率分布立即回到有限状态上来．

第 4、5、6 篇研究生灭过程的性质及其在排队论中的应用．主要研究常返性，遍历性，积分型泛函，停留时间和首达时间的分布．

第 4 篇研究生灭过程的常返性、遍历性、过份函数的极限．它们中有的涉及过程到达"∞"以后的运动．证明了很有趣的事实：(i) 对所有的生灭过程 ($R\leqslant\infty$)，零壹律均成立．(ii) 当 $R<\infty$ 时，所有的生灭过程均常返，且遍历．

第 5、6 篇本质上只涉及过程在到达"∞"以前的运动，即只涉及最小过程．第 5 篇首创差分方法研究生灭过程积分型泛函的

分布和各阶矩，以及在排队论中的应用. 英国剑桥大学教授 D. G. Kendall 评论第 5 篇时写道："除作者指出的以外，本文还有许多重要应用，……问题是困难的，本文的新技巧值得仔细学习."

第 6 篇又用递推方法求出了生灭过程积分型泛函的分布的拉普拉斯变换. 特别地证明了：停留时间的精确分布是混合指数型的；适当规范化后，它的极限分布只可能属于两种类型：或者是指数型的，或者是混合指数型的；各分布的参数也已求出. 有关首达时间的结果可作为停留时间的特殊情况而推出.

第 1 篇　全部生灭过程的分类

具有可数个状态 $E=(0,1,2,\cdots)$ 的齐次马尔可夫过程亦即转移概率 $P_{ij}(t)(i,j=0,1,2,\cdots;0\leqslant t<\infty)$，它们是满足下列条件的一些实值函数：

$$P_{ij}(t)\geqslant 0, \tag{1}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}P_{ij}(t)=1, \tag{2}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}P_{ij}(t)P_{jk}(s)=P_{ik}(t+s). \tag{3}$$

我们假定在零点满足连续性条件：

$$\lim_{t\to 0+}P_{ij}(t)=P_{ij}(0)=\delta_{ij}, \tag{4}$$

其中 $\delta_{ij}=1$，$i=j$；$\delta_{ij}=0$，$i\neq j$. 从这些条件推出（见 [6]）极限存在：

$$\lim_{t\to 0+}\frac{P_{ij}(t)-\delta_{ij}}{t}=q_{ij}, \tag{5}$$

而且满足

$$0\leqslant q_{ij}<\infty\quad(i\neq j),$$

$$\sum_{j\neq i}q_{ij}\leqslant -q_{ii}\leqslant\infty. \tag{6}$$

记 $q_i=-q_{ii}$. 数 q_i 称为从状态 i 流出的概率密度，q_{ij}称为从状态 i 转移到 j 的概率密度，矩阵

$$Q=(q_{ij}) \tag{7}$$

称为流出和转移的概率密度矩阵，满足（1）—（5）的族$\{P_{ij}(t)\}$称为Q过程.

Колмогоров [14] 举出例子，说明（6）中的记号"≤"不能用记号"="代替. 但我们假定

$$\sum_{j\neq i} q_{ij} = q_i < \infty \quad (i = 0,1,2,\cdots). \tag{8}$$

对给定的Q，条件(8)等价于([1]、[6])每个Q过程$\{P_{ij}(t)\}$满足 Колмогоров 向后微分方程组

$$P'(t) = QP(t), P(0) = I. \tag{9}$$

这里$P(t)$是以$P_{ij}(t)$为元素的矩阵，I是单位矩阵.

反之，设给定满足（8）的形如（7）的矩阵，其中$q_{ij}\geqslant 0$对$i\neq j$，而$q_i = -q_{ii}\geqslant 0$. 自然地提出下述问题：Q过程存在么？即，是否存在满足（1）—（4）的$\{P_{ij}(t)\}$，使其流出和转移的概率密度矩阵与给定的矩阵Q重合.

[16]、[7] 指出，对给定的Q，Q过程永远存在. Feller 给出了Q过程唯一的充分必要条件.

在[3]中 Добрушин 详细地研究了 Feller 条件. 满足 Feller 条件的矩阵Q称为规则的. 对于任意给定的非规则矩阵Q，在[6]中 Doob 给出了无穷多个Q过程. 我们将称在[6]中构造的Q过程类为 Doob 过程类. 每个 Doob 过程由矩阵Q和一个概率分布$\pi = (\pi_i)$唯一地给出([5，第267页])*，称之为(Q,π)Doob 过程. 但是，Doob 过程类并未穷尽全部的Q过程. 因此产生了第二个问题，对给定的Q矩阵，如何刻划所有的Q过程？此问题等价于下述问题：对给定的Q，如何求出方程（9）的满足条件（1）—（5）的所有解.

对于非规则的矩阵Q，在论文[4]出现以前，此问题毫无解答.

在[4]中，对于充分广泛的Q矩阵类，问题得以解决. Feller

* 确切地说，$\pi_i = P(x(\tau) = i)$，这里$\tau = \tau(\omega)$，$x(\tau) = x(\tau(\omega),\omega)$将在下面定义.

的论文［8］、［9］提出了相近的问题．

我们找出了全部生灭过程，即具有下列形式的矩阵 Q 的全部 Q 过程：

$$Q=\begin{pmatrix} -b_0 & b_0 & & & 0 & \\ a_1 & -(a_1+b_1) & b_1 & & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & & a_n & -(a_n+b_n) & b_n & \\ & 0 & & & & \\ & & & \cdots & \cdots & \end{pmatrix},$$

这里 $a_i>0(i>0)$，$b_i>0(i\geqslant 0)$．近些年来，生灭过程类为许多作者所研究［11］、［12］、［13］、［15］．

现在假设 $\{P_{ij}(t)\}$ 是任意 Q 过程．可以构造（见［2］、［16］、［19］）概率空间 $(\Omega,\mathscr{B},P)$（见［5］），及定义在其上的取值 $0,1,2,\cdots$ 及附加值 ∞ 的随机变量族 $X=\{x(t,\omega),\ 0\leqslant t<\infty\}$ $(\omega\in\Omega)^*$，使得有下述性质：

(i) 对任意指定的 t，$P(x(t)=\infty)=0$；

(ii) 过程 X 是齐次马尔可夫过程，具有预先给定的转移概率 $P_{ij}(t)$；

(iii) 过程 X 是可测的，关于直线上的闭集类是可分的，而且可以任意取可数的处处稠密的 t 集作为满足可分性定义条件中的可数集；

(iv) 对任意指定的非负整数 k 和任意的 ω，使 $x(t,\omega)=k$ 的 t 值的集合是一些不相交的左闭右开区间的并．

今后，我们说样本函数的性质，指的就是上面描述的函数 $x(t,\omega)$ 的性质．我们也称过程 X 为 Q 过程，它由 $P_{ij}(t)$ 唯一决

---

* 在第2篇的参考文献［1］中称 $X=\{x(t),t\geqslant 0\}$ 为右下半连续修正，在第7篇的参考文献［1］中称之为典范链．典范链是 Borel 可测的，完全可分的，轨道在（0，1，2，…，∞）中右下半连续（在一切 $q_i<\infty$ 时成为右连续），且有性质（i），（ii），于是典范链具有性质（iii）、（iv）．在第1卷中的 X，均可假定为典范链，而且当 $\omega\in\Omega$ 不特指时，ω 常略写，而记为 $X=\{x(t),t\geqslant 0\}$．——编者

定[*].

定义 $\tau(\omega)$ 为下述 t 值的最小上界，使得函数 $x(s,\omega)$ 在$[0,t]$中只有有限多个间断点[**].

引进矩阵 Q 的下列特征数

$$R=\sum_{i=0}^{\infty}m_i,\quad S=\sum_{i=1}^{\infty}e_i,$$

其中

$$m_i=\frac{1}{b_i}+\sum_{k=0}^{i-1}\frac{a_ia_{i-1}\cdots a_{i-k}}{b_ib_{i-1}\cdots b_{i-k}b_{i-k-1}},$$

$$e_i=\frac{1}{a_i}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_ib_{i+1}\cdots b_{i+k}}{a_ia_{i+1}\cdots a_{i+k}a_{i+k+1}}.$$

在 [13] 中已证明：$R=E(\tau|x(0)=0)$；当且仅当 $R=\infty$时，存在唯一的 Q 过程. 这个唯一的 Q 过程已被 Feller 找到 [7]. 因此，我们只需研究使 $R<\infty$的矩阵 Q.

在论文 [17] 中首次引入量 S. 我们指出该量的概率意义. 设 $X_N=\{x_N(t),t\geqslant 0\}$ 是具有有限个状态（0，1，…，N）的 Q_N 过程，其中

$$Q_N=\begin{pmatrix}-b_0 & b_0 & & & & 0\\ a_1 & -(a_1+b_1) & b_1 & & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & & a_{N-1} & & -(a_{N-1}+b_{N-1}) & b_{N-1}\\ 0 & & & & a_N+b_N & -(a_N+b_N)\end{pmatrix}.$$

如果 $P(x_N(0)=N)=1$ 且 τ_N 是 X_N 首次到达状态 0 的时刻，则

$$\lim_{N\to\infty}E\tau_N=S.$$

现在，对于给定的非规则的矩阵 Q，我们着手寻找所有的 Q 过程.

---

* 如果两个过程有相同的转移概率，我们视它们为同一个过程，不予区分.

** 在第 2 篇的参考文献 [1] 中称 τ 为首次无穷，在第 7 篇的参考文献 [1] 中称 τ 为第一个飞跃点. ——编者

情形 $R<\infty$，$S=\infty$. 设 $X=\{x(t),t\geqslant 0\}$ 是任意的 Q 过程. 设 $u>0$，如果对任意 $\varepsilon>0$，$x(t,\omega)$ 在区间 $[u-\varepsilon,u)$ 中取无穷多个不同的值且 $x(u,\omega)=j$，我们将称 u 是 $x(t,\omega)$ 飞跃到状态 j 的时刻. 设

$$\tau^{(n)}(\omega)=\inf\{u;u\geqslant\tau(\omega);$$
$$u\text{ 是 }x(t,\omega)\text{ 飞跃到状态 }j(\leqslant n)\text{ 的时刻}\}.$$

可以证明，对于从某个 n 后的一切 n，有 $P(\tau^{(n)}<\infty)=1$. 记

$$u_i^{(n)}=P(x(\tau^{(n)})=i)\quad(i=0,1,\cdots,n).$$

还可以证明，存在 k，使 $u_k^{(n)}>0$ 对某个 n 后的一切 n 成立，而且

$$\frac{u_i^{(n)}}{u_k^{(n)}}\text{ 不依赖于 }n,\quad n\geqslant\max(i,k),(i=0,1,2,\cdots).$$

按如下方式定义非负数列 s_0，s_1，s_2，…：

$$s_k=c\ (c\text{ 是任意的正数}),$$

$$s_i=\frac{u_i^{(n)}}{u_k^{(n)}}s_k\quad(n\geqslant\max(i,k),i=0,1,2,\cdots).$$

我们称 s_0，s_1，s_2，…为 Q 过程 X 的无穷小特征数列. 显然地，除常数因子不计外，特征数列被 Q 过程 X 唯一地决定. 令 $n_i=\sum_{j=i}^{\infty}m_j$. 我们有下面的定理.

定理 1 (i) 设给定满足 $R<\infty$，$S=\infty$ 的 Q 过程 X，则其特征数列 s_i，$i=0$，1，2，…满足关系

$$0<\sum_{i=0}^{\infty}s_in_i<\infty. \tag{10}$$

(ii) 反之，给定满足 (10) 的非负数列 $\{s_i\}$，则存在唯一的 Q 过程 X，其特征数列与 $\{s_i\}(i=0,1,2,\cdots)$ 重合.

定理 1 的 (ii) 中的 Q 过程 X 的转移概率 $P_{ij}(t)$ 可以按如下方式得到：用公式

$$\pi_i^{(n)}=\frac{s_i}{\sum_{j=0}^{n}s_j}\quad(i=0,1,\cdots,n)$$

给出集中在状态$(0,1,\cdots,n)$上的概率分布$\pi^{(n)}=(\pi_0^{(n)},\cdots,\pi_n^{(n)})(n=k,k+1,\cdots)$. 设$P_{ij}^{(n)}(t)$是$(Q,\pi^{(n)})$ Doob 过程的转移概率. 则

$$\lim_{n\to\infty}P_{ij}^{(n)}(t)=P_{ij}(t).$$

情形 $R<\infty$，$S<\infty$. 设 X 是任意 Q 过程，且

$$\beta^{(n)}(\omega)=\inf\{t:t\geqslant\tau(\omega);x(t,\omega)\leqslant n\}.$$

可以证明

$$P(\beta^{(n)}<\infty)=1\quad(n=1,2,\cdots).$$

记

$$z_0=0,\quad z_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_1a_2\cdots a_k}{b_1b_2\cdots b_k},$$

$$z=\lim_{n\to\infty}z_n\quad(\text{当 }R<\infty\text{ 时},z<\infty).$$

定理 2 (i) 设给定满足 $R<\infty$，$S<\infty$的 Q 过程 X. 则由

$$v_n=P(x(\beta^{(n)})=n),\quad(n=1,2,\cdots)\tag{11}$$

确定的数列$\{v_n\}$满足条件

$$1\geqslant v_1\geqslant 0,$$

$$1\geqslant v_n\geqslant\frac{v_{n+1}(z-z_{n+1})}{(z-z_n)-v_{n+1}(z_{n+1}-z_n)}\geqslant 0$$

$$(n=1,2,\cdots).\tag{12}$$

(ii) 反之，设给定满足 (12) 的数列$\{v_n\}$，则存在唯一的 Q 过程 X 满足 (11).

定理 2 的 (ii) 中的 Q 过程 X 的转移概率 $P_{ij}(t)$ 可以按如下方式得到：用下面的递推公式给出集中在状态 $(0, 1, \cdots, n)$ 的分布 $\pi^{(n)}=(\pi_0^{(n)},\cdots,\pi_n^{(n)})(n=1,2,\cdots)$：

$$\pi_0^{(1)}=1-v_1,\pi_1^{(1)}=v_1;$$

$$\pi_i^{(n+1)}=\pi_i^{(n)}\left(1-v_{n+1}\frac{z_{n+1}-z_n}{z-z_n}\right)\quad(0\leqslant i<n),$$

$$\pi_n^{(n+1)}=\pi_n^{(n)}\left(1-v_{n+1}\frac{z_{n+1}-z_n}{z-z_n}\right)-v_{n+1}\frac{z-z_{n+1}}{z-z_n},$$

$$\pi_{n+1}^{(n+1)}=v_{n+1}\quad(n=1,2,\cdots).$$

设 $P_{ij}^{(n)}(t)$ 是 $(Q, \pi^{(n)})$ Doob 过程的转移概率，则

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}(t) = P_{ij}(t).$$

从定理 2 得出，所有的 Q 过程和所有满足（12）的序列 $\{v_n\}$ 之间存在一一对应，对应关系由等式（11）给出.

现在设

$$v_i^{(n)} = P(x(\beta^{(n)}) = i) \quad (i = 0,1,\cdots,n; n = 1,2,\cdots),$$

$$c_{kj} = \begin{cases} \dfrac{z - z_k}{z - z_j}, & \text{对 } k > j; \\ 1\quad, & \text{对 } k \leqslant j. \end{cases}$$

注意，c_{kj}是系统从状态 k 出发，经过有穷（$\geqslant 0$）步到达状态 j 的概率（见 [10]）. 可以证明，存在极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1} v_k^{(n)} c_{k0}}{\sum\limits_{k=0}^{n} v_k^{(n)} c_{k0}} = p \quad (\geqslant 0);$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v_n^{(n)} c_{n0}}{\sum\limits_{k=0}^{n} v_k^{(n)} c_{k0}} = q \quad (\geqslant 0).$$

我们按下面的方式定义非负数列 $\{r_n\}(n = 0,1,2,\cdots)$：如果 $v_n^{(n)} = 1(n = 1,2,\cdots)$，则定义 $r_n=0$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$. 如果存在 k 使 $v_j^{(j)} = 1$ 对 $j \leqslant k$ 而 $v_{k+1}^{(k-1)} < 1$，则可以证明 $v_k^{(n)} > 0$ 对一切 $n \geqslant k$，且 $v_i^{(n)}/v_k^{(n)}$ 与 $n > \max(i,k)(i = 0,1,2,\cdots)$ 无关. 定义

$$r_k=c \quad (c \text{ 是任意正数}),$$

$$r_i = r_k \frac{v_i^{(n)}}{v_k^{(n)}} \quad (\text{这里 } n > \max(i,k), i = 0,1,2,\cdots).$$

显然地，除常数因子不计外，r_0，r_1，r_2，…被 Q 过程决定，而 p，q 被 Q 过程唯一地决定. 我们将称 p，q，r_0，r_1，r_2，…为 Q 过程 X 的特征数列.

定理 3 (i) 设给定满足 $R<\infty$，$S<\infty$的 Q 过程 X，则其特征数列满足关系式

$$\left.\begin{array}{l} p+q=1, \\ 0<\sum_{n=0}^{\infty} r_n c_{n0}<\infty, \quad \text{如果 } p>0; \\ r_n=0 \ (n=0,1,2,\cdots), \text{如果 } p=0; \end{array}\right\} \tag{13}$$

(ii) 反之，设给定满足 (13) 的非负数列 p，q，r_0，r_1，r_2，…，则存在唯一的 Q 过程 X，其特征数列与给定的数列重合.

定理 3 的 (ii) 中的 Q 过程的转移概率 $P_{ij}(t)$ 可以按如下方式得到：按下面的公式给出集中在状态 (0，1，…，n) 上的分布

$$\pi^{(n)}=(\pi_0^{(n)},\cdots,\pi_n^{(n)}) \quad (n=1,2,\cdots),$$

如果 $p>0$，则令

$$\pi_j^{(n)}=X_n\frac{r_j}{A_n} \quad (j=0,1,\cdots,n-1),$$

$$\pi_n^{(n)}=Y_n+X_n\frac{\sum_{m=n}^{\infty} r_m c_{mn}}{A_n}.$$

这里

$$0<A_n=\sum_{m=0}^{\infty} r_m c_{mn}<\infty,$$

$$X_n=\frac{pA_n(z-z_n)}{pA_n(z-z_n)+qA_0z},$$

$$Y_n=\frac{qA_0z}{pA_n(z-z_n)+qA_0z};$$

如果 $p=0$，则令

$$(\pi_0^{(n)},\cdots,\pi_{n-1}^{(n)},\pi_n^{(n)})=(0,\cdots,0,1).$$

设 $P_{ij}^{(n)}(t)$ 是 $(Q,\pi^{(n)})$ Doob 过程的转移概率. 则

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}(t)=P_{ij}(t).$$

参 考 文 献

[1] Austin D. On the existence of Markov transition probability functions.

Proc. Nat. Acad. U. S. A. ,1955,41:224～226

[2] Chung K L. Foundations of the theory of continuous parameter Markov chains. Proc. Third Berkeley Symp. math. statistics and prob. , Berkeley:University of California Press,1956,2:29～40

[3] Добрушин Р Л. Об условиях регулярности однородных по времени Марковских процессов со счетным числом возможных состояний. УМН, 1952,7(6):185～191

[4] Добрушин Р Л. Некоторые классы однородных счетных Марковских процессов. Теория вероят. и ее примен. ,1957,11(3):377～380

[5] Doob J L. Stochastic process. New York:John Wiley & Sons,1953.

[6] Doob J L. Markoff chains -denumerable case. Trans. Am. math. soc. , 1945,58:455～473

[7] Feller W. On the integro—differential equations of purely discontinuous Markoff processes. Trans. Am. math. soc. 1940,48:488～515. Errata. ibib. ,1945,58:474

[8] Feller W. Boundaries induced by non-negative matrices. Trans. Am. math. Soc. ,1956,83:19～54

[9] Feller W. On boundaries and lateral conditions for the Kolmogorov differential equations. Ann. of math. ,1957,65:527～570

[10] Harris T E. First passage and recurrence distribution. Trans. Am. math. Soc. ,1952,73:471～486

[11] Karlin S. ,McGregor J. Representation of a class of stochastic processes. Proc. Nat. Acad. Sci. ,1955,41:387～391

[12] Karlin S. ,McGregor J. The differential equations of birth and death processes and the stieltjies moment problem. Trans. Am. math. soc. , 1957,85:489～546

[13] Karlin S. ,McGregor J. The classification of birth and death processes. Trans. Am. math. soc. ,1957,86:366～400

[14] Колмогоров А Н. К вопросу о дифференцируемости переходных вероятностей в однородных по времени процессах Маркова со счётным числом состояний. учен. зап. МГУ,Матем. 1951,148(4):53～59

[15] Ledermann W. ,Reuter G E H. Spectral theory for the differential equations of simple birth and death processes. Phil. Trans. Roy. Soc. London(ser. A),1954,246:321～369

[16] Lévy P. Systèmes markoviens et stationnaires;cas dénumerable. Ann. Sci. Ecole Norm. Syp. ,1951,68(3):327～381

[17] Reuter G E H. Demumerable Markov processes and the associated contraction semigroups on l. Acta. math. ,1957,97:1～46
[18] Reuter G E H. A note on contraction semigroups. Math. scand. ,1955, 3:275～280
[19] Юшкевич А А. О Дифференцируемости переходных вероятностей однородного марковского процесса со счетным числом состояний. Учен. зап. МГУ,Матем. ,1956,186(9):141～160

第2篇 生灭过程构造论

2.1 概述

设$X=\{x(t), t\geqslant 0\}$为定义在概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的具可列多个状态的马氏过程，其相空间为$E=(0,1,2,\cdots)$，转移概率为$P_{ij}(t), i,j\in E, t\geqslant 0$，它们是一组满足下列条件的实值函数：

$$P_{ij}(t)\geqslant 0, \tag{1.1}$$

$$\sum_j P_{ij}(t)=1, \tag{1.2}$$

$$\sum_k P_{ik}(t)P_{kj}(s)=P_{ij}(t+s), \tag{1.3}$$

$$\lim_{t\to 0}P_{ij}(t)=P_{ij}(0)=\delta_{ij}, \tag{1.4}$$

其中$\sum\limits_j$表示对一切$j\in E$求和，又$\delta_{ii}=1$, $\delta_{ij}=0$ $(i\neq j)$. 由此可证明[1]存在极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{P_{ij}(t)-\delta_{ij}}{t}=q_{ij}. \tag{1.5}$$

令$q_i=-q_{ii}\geqslant 0$. 以后恒设对一切$i\in E$，有

$$0<\sum_{j\neq i}q_{ij}=-q_{ii}=q_i<\infty, \tag{1.6}$$

称 $Q=(q_{ij})$ 为密度矩阵，而马氏过程 $X=\{x(t),t\geqslant 0\}$ 则简称为 Q 过程，以表示它与 Q 有（1.5）的关系. 如果两个 Q 过程有相同的 $P_{ij}(t)$，我们就把它们看作同一个 Q 过程. 故有时也称一组满足（1.1）—（1.4）的 $(P_{ij}(t))$ 为一个 Q 过程. 特别当

$$\left.\begin{array}{l} q_{ii+1}=b_i\ (>0),\ q_{ii-1}=a_i\ (>0), \\ q_{ii}=-\ (a_i+b_i);\ q_{ij}=0\ (|i-j|>1) \end{array}\right\} \tag{1.7}$$

（补定义 $a_0=0$）时，称如是的 Q 过程为生灭过程.

反之，设已给矩阵 $Q=(q_{ij}),q_{ij}\geqslant 0(i\neq j)$ 并使（1.6）成立*，一个重要的问题是求出一切 Q 过程，即求出一切矩阵 $P(t)=(P_{ij}(t))$，使满足条件（1.1）—（1.5）. 可以证明[1]，这问题在假定（1.6）下，等价于求下列向后微分方程组的满足（1.1）—（1.5）的全部解：

$$P'(t)=QP(t),\quad P(0)=I, \tag{1.8}$$

这里 $P'(t)=(P'_{ij}(t)),I=(\delta_{ij})$.

关于此问题的研究情况如下：1945 年 Doob[1,第24页]证明，Q 过程总是存在的，而且只有两种可能，或者只存在一个，或者有无穷多个；早在 1940 年，Feller 在 [7] 中甚至对更一般情况找到了 Q 过程唯一的充要条件，此条件后为 Добрушин 所详细研究[2]，满足 Feller 条件的矩阵 Q 称为规则的，于是 Q 过程的存在与唯一问题得以完满解决. 剩下是求出全部解（Q 过程）的问题. 对规则矩阵，这问题早已解决[7]；对任一不规则矩阵，Doob 在 [4，第 267 页] 中虽找出了无穷多个 Q 过程（以后称这种 Q 过程为 Doob 过程），但却远未穷尽一切 Q 过程. 于是求出全部 Q 过程的问题，引起了广泛的注意，虽然经过不少人的努力，距离彻底解决，似乎还要做许多工作. 目前试图解决此问题的方法至少有三种，各均取得一定成果. Feller，孙振祖，Reuter，Karlin 与 McGregor 分别用各种分析方法[8,11,10,13]对某种 Q 求出了全部 $(P_{ij}(t))$，但 [8] 与 [10] 中所求出的 $(P_{ij}(t))$ 除满足（1.8）外，还满足向前微分

---

* 本篇以后所用的 Q 均满足此二条件，不再声明.

方程组

$$P'(t) = P(t)Q, \quad P(0) = I. \tag{1.9}$$

Дынкин 与 Reuter 用半群方法[6,11]，找出了部分 Q 过程的无穷小算子的定义域；第三种方法见 Добрушин[3]及作者[14,15]，这种方法的基本思想类似于函数构造论：根据样本函数（或称轨道）的性质，可以看出 Doob 过程的结构较为简单，然后通过这种较简单的过程来逼近任一 Q 过程. 这种方法目前虽然只用来研究几种特殊的 Q 矩阵，但估计它的潜力尚未全部发挥，参看［3］.

求出全部 Q 过程的问题之所以重要至少是由于：一方面，在现实中遇到的马氏过程，容易求出的是 Q 而不是 $P_{ij}(t)$，例如排队论中许多例子［12，§20，§34］就是如此，因此，Q 是否能唯一决定过程、如何决定以及如不能唯一决定时、尚需补充些什么数字特征才能唯一决定等问题，就具有重要的理论与实际的意义；另一方面，如上所述，此问题紧密联系于微分方程论（解方程组(1.8)）及半群理论（求出某已给无穷小算子表达式的全体可能的定义域，或等价地，求出全体以此算子为无穷小算子的半群，这些半群由马尔可夫转移概率产生）. 因此，如能以概率方法求出全部 Q 过程，就等价于用概率方法求出了（1.8）的全部解或全体半群，对微分方程及半群理论均有一定影响. 从这种观点看来，上述第三种方法也许更合乎要求.

本篇的主要目的是：研究生灭过程样本函数的性质；并在此基础上，应用第三种方法来求出全体生灭过程（对已给 Q）；同时就这种过程来叙述第三种方法的逻辑基础. 因此，它的目的既是结果性的，也是方法性的. 本篇中部分结果已预告于［14，15］中，此地给予证明.

2.2～2.5 研究生灭过程样本函数的性质与过程的变换；2.6～2.8 对已给的 Q 求出全部 Q 过程并讨论其构造；2.9 中叙述若干尚待进一步研究的问题；最后，对本篇结果作出总结并给出必要的补充. 为便于阅读起见，在 2.10 的 3）中补充证明了本篇用到的关于生灭过程的性质. 阅读本篇还需要过程论中一些最基本

的知识，如过程的可分性等，在补充中不可能补齐，且幸所需的全部预备知识不多，它们都可在文献 [1，Ⅱ §2～§9] 或相应的书中找到.

2.2 基本特征数的概率意义

设已给形如（1.7）的密度矩阵 Q. 对这类矩阵，重要的是下列基本特征数*：

$$m_i = \frac{1}{b_i} + \sum_{k=0}^{i-1} \frac{a_i a_{i-1} \cdots a_{i-k}}{b_i b_{i-1} \cdots b_{i-k} b_{i-k-1}} \quad (i \geqslant 0), \tag{2.1}$$

$$e_i = \frac{1}{a_i} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_i b_{i+1} \cdots b_{i+k}}{a_i a_{i+1} \cdots a_{i+k} a_{i+k+1}} \quad (i > 0), \tag{2.2}$$

$$R = \sum_{i=0}^{\infty} m_i, \quad S = \sum_{i=1}^{\infty} e_i \tag{2.3}$$

以及

$$z_0 = 0, \quad z_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_1 a_2 \cdots a_k}{b_1 b_2 \cdots b_k}, \quad z = \lim_{n \to \infty} z_n. \tag{2.4}$$

为了叙述这些数字的概率意义，考虑任一 Q 过程 $X = \{x(t), t \geqslant 0\}$. 不影响转移概率及 Q，可设此过程为典范链**. 它是完全可分的[4]，即关于一维闭集可分，而且可分 t-集可取为 $[0, \infty)$ 中任一可列稠集 $R = (r_i)$. 由于可分性的需要，有时须引入虚状态 ∞，但对任一固定的 $t \geqslant 0$，$P(x(t) = \infty) = 0$. 以后记 $\bar{E} = E \cup \{\infty\}$. 定义随机变量

$$\xi_i(\omega) = \inf(t : x(t, \omega) = i). \tag{2.5}$$

并以 P_j 及 E_j 表示由过程的转移概率及集中在状态 j 上的开始分布所产生的概率测度及对此测度而取的数学期望，[2] 中证明了：

---

* 特征数 R 等的一般化见 [16].

** 见第 7 篇参考文献 [1] 及第 1 篇中的脚注——编者.

$m_i = E_i\xi_{i+1}$，因而 $R = \lim\limits_{n\to\infty} E_0\xi_n$；并且还证明了，当而且只当 $R=\infty$ 时，Q 过程是唯一的（见本篇 2.1 节和定理 10.3）. 因此，我们以后只考虑 $R<\infty$ 的情形. 如果令

$$\tau(\omega) = \inf(t:\lim_{s\uparrow t} x(s,\omega) = \infty) \tag{2.6}$$

（即 [1，第 235 页] 所称的第一个无穷），则由积分的单调收敛定理，$R = E_0\tau$. 换言之，R 是自 0 出发，沿着过程的轨道而运动的质点初次到达 ∞ 的平均时间.

S 的概率意义曾预告于 [14，15]. 考虑矩阵 Q_N

$$Q_N = \begin{pmatrix} -b_0 & b_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & -(a_1+b_1) & b_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{N-1} & -(a_{N-1}+b_{N-1}) & b_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_N+b_N & -(a_N+b_N) \end{pmatrix}, \tag{2.7}$$

它由 Q 中前 $n+1$ 横列与前 $n+1$ 直行的元素构成，但需将其中第 $n+1$ 横列与第 n 直行上的元 a_N 换成 a_N+b_N. 考虑可分 Q_N 过程 $X_N = \{x_N(t), t\geqslant 0\}$. 定义

$$\sigma_N(\omega) = \inf(t: x_N(t,\omega) = 0). \tag{2.8}$$

如设 $P(x_N(0) = N) = 1$，则有

引理 2.1 $\lim\limits_{N\to\infty} E\sigma_N = S$.

证 引进

$$\xi_i^{(N)}(\omega) = \inf(t: x_N(t,\omega) = i). \tag{2.9}$$

并令 $e_i^{(N)} = E_i\xi_{i-1}^{(N)}$，即 $e_i^{(N)}$ 为 X_N 自 i 出发初次到达 $i-1$ 的平均时间. 如所周知 [1，第 148 及 215 页]，对 Q_N 过程，在状态 k 上的逗留时间 $\beta(=\beta_k)$ 有指数分布

$$P_k(\beta \leqslant t) = \begin{cases} 1 - e^{-c_k t} & (t \geqslant 0), \\ 0 & (t < 0), \end{cases} \quad (k\geqslant 0) \tag{2.10}$$

其中 $c_k=a_k+b_k$，故 $E_k\beta=1/c_k$，而且

$$
\left.\begin{aligned}
P_k(x_N(\beta+0)=k+1)&=\frac{b_k}{c_k},\\
P_k(x_N(\beta+0)=k-1)&=\frac{a_k}{c_k},
\end{aligned}\quad (0<k<N)\right\} \tag{2.11}
$$

$$
P_0(x_N(\beta+0)=1)=P_N(x_N(\beta+0)=N-1)=1 \tag{2.12}
$$

（典范链使(2.11)(2.12)有意义，因为典范链是 Borel 可测的，见［1，第 141 页］或第 7 篇中文献［1，第 87 页］）.（2.12）表示，状态 0 与 N 都是 Q_N 过程的反射壁. 由此可见，$e_i^{(N)}$ 应满足方程组

$$
\begin{aligned}
e_i^{(N)}&=\frac{a_i}{a_i+b_i}\cdot\frac{1}{a_i+b_i}\\
&\quad+\frac{b_i}{a_i+b_i}\left(\frac{1}{a_i+b_i}+e_{i+1}^{(N)}+e_i^{(N)}\right)\\
&\quad(i=1,2,\cdots,N-1),\\
e_N^{(N)}&=\frac{1}{a_N+b_N}.
\end{aligned}
$$

解出后得

$$
\begin{aligned}
e_i^{(N)}&=\frac{1}{a_i}+\sum_{k=0}^{N-2-i}\frac{b_ib_{i+1}\cdots b_{i+k}}{a_ia_{i+1}\cdots a_{i+k}a_{i+k+1}}\\
&\quad+\frac{b_ib_{i+1}\cdots b_{N-1}}{a_ia_{i+1}\cdots a_{N-1}(a_N+b_N)}\\
&\quad(i=1,2,\cdots,N-2),
\end{aligned}\tag{2.12'}
$$

从而 $\lim\limits_{N\to\infty}e_i^{(N)}=e_i$，又

$$
\lim_{N\to\infty}E\sigma_N=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}e_i^{(N)}=S. \qquad ∎
$$

直观地说，上面的引理表示，当∞是“反射壁”时，e_i 是 Q 过程自 i 初次到 $i-1$ 的平均时间，而 S 则是此过程自∞初次到 0 的平均时间.

根据 $S<\infty$ 或 $S=\infty$，可将全体不规则的（或等价地，使 $R<\infty$ 的）(1.7) 形的矩阵 Q 分为 S_1 与 S_2 两类. 以后（见定理 4.2 及其系）会看到，S_1 类中的 Q 所对应的 Q 过程，结构上要比 S_2 类中的复杂. 对于 S_2 类中的 Q，质点不可能自∞“连续地”回到有

穷状态上来.

利用［9］中的一个结果，容易证明（2.4）中的数具有下列概率意义：任取 E 中三状态 $n>k>j$，并考虑 Q 过程的嵌入* 马氏链 $x_n(\omega)$, $n\geqslant 0$，即具有下列转移概率的马氏链

$$\left.\begin{aligned} P(x_n=i-1|x_{n-1}=i)&=\frac{a_i}{c_i},\\ P(x_n=i+1|x_{n-1}=i)&=\frac{b_i}{c_i}. \end{aligned}\right\}\tag{2.13}$$

关于此链，质点自 k 出发，在到达 n 以前先到达 j 的概率为 $\frac{z_n-z_k}{z_n-z_j}$（见 2.10 节、定理 10.4）；当 n 上升时，此概率不下降. 今令自 k 出发，终于要到达 j 的概率为 d_{kj}，并理解 $\frac{\infty}{\infty}=1$，则当 $j<k$ 时，

$$d_{kj}=\lim_{n\to\infty}\frac{z_n-z_k}{z_n-z_j}=\frac{z-z_k}{z-z_j}.\tag{2.14}$$

考虑任一可分 Q 过程 $X=\{x(t),t\geqslant 0\}$，仍以 c_{kj} 表示自 k 出发，经有穷步转移到达 j 的概率，或者等价地，记

$$c_{kj}=P_k(\xi_j<\tau),\tag{2.15}$$

设 $R<\infty$. 由于 $z\leqslant b_0R$，故 $d_{kj}<1$. 显然，当 $j<k$ 时，$c_{kj}=d_{kj}$；如果 $j>k$，则由（2.6）得 $P_k(\xi_j<\infty)\geqslant P_k(\tau<\infty)=1$（这里还用到生灭过程的特性：自 k 出发，下一步落到 $k-1$ 或 $k+1$ 的概率为 1；因而当自 k 到达另一状态时，必历经一切中间状态. 此特性将多次用到而不另说明），故 $d_{kj}=1$. 因此如把 0 步也算作有穷步，总结上述便得

引理 2.2 对可分 Q 过程 X，如 $R<\infty$，则自 k 出发，经有穷步到达 j 的概率

$$c_{kj}=\begin{cases}1, & \text{如 } k\leqslant j;\\ \dfrac{z-z_k}{z-z_j}, & \text{如 } k>j.\end{cases}\tag{2.16}$$

---

* 参看定义 4.1，那里考虑一般情况.

2.3 Doob 过程的变换

最简单的一类 Q 过程是 Doob 过程，它的定义见 2.10 或 [4，第 267 页]. 此类过程的样本函数是所谓 T 跳跃函数，后者如下定义：

定义 3.1 设 $y(t)$，$t\geqslant 0$ 为取值于 E 的函数，称点 t_0 为它的跳跃点，如它在 t_0 不连续，而且存在 $\varepsilon>0$，使在 $[t_0-\varepsilon,t_0)$ 及 $[t_0,t_0+\varepsilon)$ 中，它的值分别为二不相等的有限常数；称点 τ 为它的飞跃点，如对任意 $\varepsilon>0$，在 $[\tau-\varepsilon,\tau)$ 中，它有无穷多个跳跃点.

定义 3.2 值域为 E 的函数 $y(t)$，$t\geqslant 0$ 称为 T 跳跃的，如果：(i) 在任一有穷区间中，只有有穷多个飞跃点 $\tau_i(\tau_0=0,\tau_i<\tau_{i+1})$；(ii) 在任一飞跃区间 $[\tau_i,\tau_{i+1})$ 中，一切不连续点都是跳跃点 τ_{ij}，其数可列 ($\tau_i=\tau_{i0}<\tau_{i1}<\tau_{i2}<\cdots$，且 $j\to\infty$ 时，$\tau_{ij}\to\tau_{i+1}$)，$i=0,1,2,\cdots$；(iii) 在任二相邻的不连续点上，有 $|y(\tau_{ij})-y(\tau_{ij+1})|=1(i,j=0,1,2,\cdots)$.

T 跳跃函数称为 T_n 跳跃的，如在任一飞跃点 $\tau_i(i>0)$ 上，$y(\tau_i)\leqslant n$.

注意 T 跳跃函数右连续，不以 ∞ 为值.

对于 Doob 过程 X，由于 $R<\infty$，一切随机变量 τ_{ij} 均以概率 1 有穷. 此过程由 Q 及分布 $\pi=(\pi_j)$ 决定，这里 $\pi_j=P(x(\tau_i)=j)$ 与 i 无关 $(i=1,2,\cdots)$，故称它为 (Q,π)Doob 过程或 (Q,π) 过程.

以后常要用到过程的一种变换.

定义 3.3 称函数 $y(t),t\geqslant 0$ 自 $x(t),t\geqslant 0$ 经 $C(\alpha_k,\beta_k)$ 变换得来，如果存在二列正数 (α_k)、(β_k)，使

$$0(=\beta_0)<\alpha_1\leqslant\beta_1<\alpha_2\leqslant\beta_2<\cdots<\alpha_k\leqslant\beta_k<\cdots,$$

$$\sum_{i=0}(\alpha_{i+1}-\beta_i)=\infty,$$

而且 $y(t)$ 如下定义：

令 $\gamma_1=\alpha_1$；$y(t)=x(t)$，当 $0\leqslant t<\gamma_1$ 时，

如 $y(t)$ 已在$[0,\gamma_k)$ 上定义，则当 $0\leqslant t<\alpha_{k+1}-\beta_k$ 时，令

$$\gamma_{k+1}=\gamma_k+(\alpha_{k+1}-\beta_k);y(\gamma_k+t)=x(\beta_k+t).$$

直观地说，抛去 $x(t),t\geqslant 0$ 对应于$[\alpha_i,\beta_i)$ 的那些段，剩下的第一段$[0,\alpha_1)$保留不动，其余的段向左移动，使 $[0,\alpha_1)$，$[\beta_i,\alpha_{i+1})$（$i=1,2,\cdots$）按原序联结而不相交，所得函数即 $y(t),t\geqslant 0$.

今以 $x_n(t),t\geqslant 0$ 表示某 T_n 跳跃函数，用下列方法定义二列正数，这种迭代定义方法将多次引用. 以

$$\tau_1 \text{ 表示 } x_n(t) \text{ 的第一个飞跃点}, \tag{3.1}$$

$$\tau_{k_1}=\inf(\tau:\tau\geqslant\tau_1,\tau \text{ 是飞跃点,而且 } x_n(\tau)<n); \tag{3.2}$$

如果已定义 τ_{k_i}，则令

$$\tau_{k_i+1}=\inf(\tau:\tau>\tau_{k_i},\tau \text{ 是飞跃点}), \tag{3.3}$$

$$\tau_{k_{i+1}}=\inf(\tau:\tau\geqslant\tau_{k_i+1},\tau \text{ 是飞跃点},x_n(\tau)<n), \tag{3.4}$$

于是

$$0<\tau_1\leqslant\tau_{k_1}<\tau_{k_1+1}\leqslant\tau_{k_2}<\cdots<\tau_{k_i+1}\leqslant\tau_{k_{i+1}}<\cdots$$

设以上诸数均有穷，而且

$$\sum_{i=0}(\tau_{k_i+1}-\tau_{k_i})=\infty \quad (k_0=0,\tau_0=0) \tag{3.5}$$

对$x_n(t)$施行$C(\tau_{k_i+1},\tau_{k_{i+1}})$变换后，得一$T_{n-1}$跳跃函数 $x_{n-1}(t)$，记此关系为

$$f_{n\,n-1}(x_n(t))=x_{n-1}(t), \tag{3.6}$$

故 f_{nn-1}表 T_n 跳跃函数到 T_{n-1}跳跃函数的变换，注意（3.6）并不表示对固定的 t 双方相等.

现在考虑 $(Q,S^{(n)})$ 过程 $X_n=\{x_n(t,\omega),t\geqslant 0\}(\omega\in\Omega)$，这里 $S^{(n)}=(\mathscr{S}_0^{(n)},\mathscr{S}_1^{(n)},\cdots,\mathscr{S}_n^{(n)})$ 是集中在前 $n+1$ 个状态（0，1，…，n）上的分布，使 $P(x_n(\tau_i)=j)=\mathscr{S}_j^{(n)}$. 为简单计，设 $\mathscr{S}_0^{(n)}>0$. 利用（3.1）～（3.4）定义随机变量列 $\tau_{k_i+1}(\omega),\tau_{k_{i+1}}(\omega)(i\geqslant 0)$，则由于 $R<\infty$及 $\mathscr{S}_0^{(n)}>0$，它们均以概率 1 有穷而且（3.5）成立. 固定 $\omega\in\Omega$，对函数 $x_n(t,\omega)$，$t\geqslant 0$ 施行 $C(\tau_{k_i+1}(\omega),\tau_{k_{i+1}}(\omega))$ 变换

后，得一二元函数 $x_{n-1}(t,\omega),t \geqslant 0(\omega \in \Omega)$，即

$$f_{nn-1}(x_n(t,\omega)) = x_{n-1}(t,\omega). \tag{3.7}$$

引理 3.1 $X_{n-1} = \{x_{n-1}(t),t \geqslant 0\}$ 是 $(Q,S^{(n-1)})$ 过程，这里

$$\mathscr{S}_i^{(n-1)} = \mathscr{S}_i^{(n)} / \sum_{j=0}^{n-1} \mathscr{S}_j^{(n)} \quad (0 \leqslant i < n). \tag{3.8}$$

证 对固定的 ω，由定义知 $x_{n-1}(t,\omega)$ 是 T_{n-1} 跳跃函数. 今证对每固定的 t，$x_{n-1}(t,\omega)$ 是随机变量. 以 $\sigma_l(\omega)$ 表示 $x_{n-1}(t,\omega)$ 的第 l 个飞跃点（$\sigma_0 = 0$），并令

$$\eta_l(\omega) = \sum_{i=1}^{l} (\tau_{k_i}(\omega) - \tau_{k_{i-1}+1}(\omega)) \quad (k_0 = 0) \tag{3.9}$$

（换言之，$\eta_l(\omega)$ 是在 $\tau_{k_l}(\omega)$ 以前，自 $x_n(t,\omega)$ 所抛去的区间的总长）. 注意 $x_n(t,\omega)$ 是右连续过程，故是 Borel 可测的，因而

$$\begin{aligned}&(x_{n-1}(t,\omega) = i,\sigma_l(\omega) < t \leqslant \sigma_{l+1}(\omega)) = \\ &= (x_n(t+\eta_l,\omega) = i,\tau_{k_l}(\omega) < t + \eta_l(\omega) < \tau_{k_l+1}(\omega))\end{aligned}$$

是可测集，故 $(x_{n-1}(t,\omega) = i) = \sum_{l=0}^{\infty} (x_{n-1}(t,\omega) = i,\sigma_l(\omega) < t \leqslant \sigma_{l+1}(\omega))$ 也可测，再留意 $x_{n-1}(0,\omega) = x_n(0,\omega)$，即得证 $X_{n-1} = \{x_{n-1}(t),t \geqslant 0\}$ 是一随机过程. 它还是 $(Q,S^{(n-1)})$ 过程，因为对任意 $l \geqslant 1$，令 τ_m 为 $x_n(t)$ 的第 m 个飞跃点，由（3.8）得

$$\begin{aligned}&P(x_{n-1}(\sigma_l) = j) = P(x_n(\tau_{k_l}) = j) \\ &= \sum_{m=l}^{\infty} P(x_n(\tau_{k_l}) = j \mid \tau_{k_l} = \tau_m) \cdot P(\tau_{k_l} = \tau_m) \\ &= \sum_{m=l}^{\infty} \frac{(1-\mathscr{S}_n^{(n)})^{l-1} \cdot \mathscr{S}_j^{(n)} \cdot [\mathscr{S}_n^{(n)}]^{m-l}}{(1-\mathscr{S}_n^{(n)})^{l} \cdot [\mathscr{S}_n^{(n)}]^{m-l}} P(\tau_{k_l} = \tau_m) \\ &= \mathscr{S}_j^{(n-1)} \sum_{m=l}^{\infty} P(\tau_{k_l} = \tau_m),\end{aligned}$$

因为 $\mathscr{S}_0^{(n)} > 0$，故 $P(\tau_l \leqslant \tau_{k_l} < \infty) = 1$，即 $\sum_{m=l}^{\infty} P(\tau_{k_l} = \tau_m) = 1$，从而

$$P(x_{n-1}(\sigma_l) = j) = \mathscr{S}_j^{(n-1)} \quad (0 \leqslant j \leqslant n-1).$$

最后，根据 Doob 过程的定义[1,第24页]，还要证明 X_{n-1} 是由相

互独立的最小链[1,第232页]组成. X_{n-1} 是由最小链组成是显然的. 故只要证诸最小链的独立性，以 τ_{ij}，σ_{ij}分别表示 X_n 及 X_{n-1} 第 i 个飞跃点后第 j 个跳跃点 $(j\geqslant 0)$，$f_u(x_1,y_1,x_2,y_2,\cdots)$ 表示任意无穷维 Borel 可测函数，$u=1$，2，…. 令

$$F_{uv}^{(n-1)}(\omega)=f_u(x_{n-1}(\sigma_{v,0}),\sigma_{v1}-\sigma_{v0},x_{n-1}(\sigma_{v1}),\sigma_{v2}-\sigma_{v1},\cdots),$$

$$F_{uv}^{(n)}(\omega)=f_u(x_n(\tau_{v0}),\tau_{v1}-\tau_{v0},x_n(\tau_{v1}),\tau_{v2}-\tau_{v1},\cdots).$$

设 l 为任意正整数，c_1，…，c_l 为任意 l 个实数，则

$$\begin{aligned}
&P(x_{n-1}(\sigma_v)=j_v,F_{v,v}^{(n-1)}<c_v,v=1,\cdots,l)\\
&=P(x_n(\tau_{k_v})=j_v,F_{vk_v}^{(n)}<c_v,v=1,\cdots,l)\\
&=\Sigma P(k_v(\omega)=m_v,x_n(\tau_{m_v})=j_v,F_{vm_v}^{(n)}<c_v,v=1,\cdots,l)\\
&=\Sigma P(x_n(\tau_{m_v})=j_v,F_{vm_v}^{(n)}<c_v,v=1,\cdots,l,x_n(\tau_i)=n,\\
&\quad i\overline{\in}\{m_1,m_2,\cdots,m_l\},i<m_l),
\end{aligned}$$

这里及以下的 Σ 表示对正整数 $m_l>m_{l-1}>\cdots>m_1\geqslant 1$ 求和. 由于 X_n 是 Doob 过程，故构成 X_n 的最小链是相互独立的. 因此，如以 $\overline{P}_i$ 表开始分布集中在 i 上时最小链所产生的测度，即得上式最右项

$$\begin{aligned}
&=\Sigma[\mathscr{S}_n^{(n)}]^{m_1-1}\cdot[\mathscr{S}_n^{(n)}]^{m_2-(m_1+1)}\cdots[\mathscr{S}_n^{(n)}]^{m_l-(m_{l-1}+1)}\\
&\quad\cdot\prod_{v=1}^{l}\overline{P}_{j_v}(F_{v,m_v}^{(n)}<c_v)\\
&=\prod_{v=1}^{l}\{\overline{P}_{j_v}(F_{v,m_v}^{(n)}<c_v)/(1-\mathscr{S}_n^{(n)})\}\\
&=\prod_{v=1}^{l}P(x_n(\tau_{k_v})=j_v,F_{v,k_v}^{(n)}<c_v)\\
&=\prod_{v=1}^{l}P(x_{n-1}(\sigma_v)=j_v,F_{v,v}^{(n-1)}<c_v).
\end{aligned}\tag{3.10}$$

然后对 j_v 自 0 到 $n-1$ 求和 $(v=1,\cdots,l)$，即得

$$P(F_{vv}^{(n-1)}<c_v,v=1,\cdots,l)=\prod_{v=1}^{l}P(F_{vv}^{(n-1)}<c_v),$$

此即表示构成 X_{n-1} 的诸最小链的独立性. ∎

类似于 $f_{n,n-1}$，定义另一种变换 $g_{n,n-1}$如下：

对 T_n 跳跃函数 $x_n(t)$，仿（3.1）—（3.4），令

τ_1 为 $x_n(t)$ 的第一个飞跃点， （3.1′）

$$\beta_{k_1} = \inf(t : t \geqslant \tau_1, x_n(t) < n); \tag{3.2′}$$

τ_{k_i+1} 为 β_{k_i} 后的第一个飞跃点， （3.3′）

$$\beta_{k_{i+1}} = \inf(t : t \geqslant \tau_{k_i+1}, x_n(t) < n). \tag{3.4′}$$

仍设此诸数皆有穷而且

$$\sum_{i=0}^{\infty}(\tau_{k_i+1} - \beta_{k_i}) = \infty \quad (k_0 = 0, \beta_0 = 0) \tag{3.5′}$$

对 $x_n(t)$ 施以 $C(\tau_{k_i+1}, \beta_{k_{i+1}})$ 变换后，得一 T_{n-1} 跳跃函数 $x_{n-1}(t)$，记此关系为

$$g_{n,n-1}(x_n(t)) = x_{n-1}(t), \tag{3.11}$$

或者，为以后方便，记成

$$g_{n+1,n}(x_{n+1}(t)) = x_n(t). \tag{3.12}$$

这表示变换 $g_{n+1,n}$把 T_{n+1}跳跃函数变为 T_n 跳跃函数.

今考虑 $(Q, V^{(n+1)})$ 过程 $X_{n+1} = \{x_{n+1}(t), t \geqslant 0\}$，这里 $V^{(n+1)} = (v_0^{(n-1)}, v_1^{(n+1)}, \cdots, v_{n+1}^{(n+1)})$ 表示某集中在（0，1，…，$n+1$）上的分布，它的样本函数是 T_{n+1}跳跃函数. 由（3.12），令

$$g_{n+1,n}(x_{n+1}(t,\omega)) = x_n(t,\omega), \omega \in \Omega. \tag{3.13}$$

则类似地得

引理 3.2 $X_n = \{x_n(t), t \geqslant 0\}$ 是$(Q, V^{(n)})$ 过程，这里

$$\left.\begin{aligned}
&v_j^{(n)} = v_j^{(n+1)} \Big/ \Big(\sum_{i=0}^{n} v_i^{(n+1)} + v_{n+1}^{(n+1)} c_{n+1,n} \Big) \quad (j < n), \\
&v_n^{(n)} = (v_n^{(n+1)} + v_{n+1}^{(n+1)} c_{n+1,n}) \Big/ \Big(\sum_{i=0}^{n} v_i^{(n+1)} + v_{n+1}^{(n+1)} c_{n+1,n} \Big), \\
&\sum_{i=0}^{n} v_i^{(n)} = \sum_{i=0}^{n+1} v_i^{(n+1)} = 1.
\end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

而 c_{kj}由（2.16）定义，n=1，2，….

证 证明仿引理 3.1，不同处在于证（3.14）. 分别以 $\sigma_l(\omega)$，$\tau_l(\omega)$ 表示 $x_n(t,\omega)$ 与 $x_{n+1}(t,\omega)$ 的第 l 个飞跃点.

$$P(x_n(\sigma_l)=j)=P(x_{n+1}(\beta_{k_l})=j)$$

$$=\sum_{m=l}^{\infty}P(x_{n+1}(\beta_{k_l})=j|_{\tau_m\leqslant\beta_{k_l}<\tau_{m+1}})\cdot P(\tau_m\leqslant\beta_{k_l}<\tau_{m+1}). \tag{3.15}$$

由于 $R<\infty$，对 X_{n+1}，自 k 出发，经有穷步到达 $j(\geqslant k)$ 的概率为 1，到达 $k-1$ 的概率为 $c_{k,k-1}$，故 $\Delta=\sum_{i=1}^{n}v_i^{(n-1)}+v_{n+1}^{(n-1)}c_{n+1,n}>0$ 是自任一飞跃点出发经有穷步* 到达（0，1，…，n）的概率. 因而

$$P(x_{n+1}(\beta_{k_l})=j|_{\tau_m\leqslant\beta_{k_l}<\tau_{m+1}})$$

$$=\frac{(1-\Delta)^{m-l}\Delta^{l-1}v_j^{(n-1)}}{(1-\Delta)^{m-l}\Delta^l}=v_j^{(n)}\quad(0\leqslant j<n).$$

类似地有

$$P(x_{n+1}(\beta_{k_l})=n|\tau_m\leqslant\beta_{k_l}<\tau_{m+1})$$

$$=v_n^{(n+1)}+v_{n+1}^{(n+1)}c_{n+1,n},$$

以此代入（3.15），并注意易证 $P(\tau_l\leqslant\beta_{k_l}<\infty)=1,P(\lim_{l\to\infty}\tau_l=\infty)=1$，即得证（3.14）中前二式；最后一式是显然的. ∎

更一般地，对 $n>m$，定义二变换

$$f_{nm}=f_{m+1\,m}\cdots f_{n-1\,n-2}f_{n\,n-1}, \tag{3.16}$$

$$g_{nm}=g_{m+1\,m}\cdots g_{n-1\,n-2}g_{n\,n-1}. \tag{3.17}$$

它们都是把 T_n 跳跃函数变为 T_m 跳跃函数的单值变换，逆变换 f_{nm}^{-1}，g_{nm}^{-1}，则把 T_m 跳跃函数变为 T_n 跳跃函数，但后者一般是多值的.

仍旧考虑 $(Q,S^{(n)})$ 过程 $X_n=\{x_n(t),t\geqslant 0\}$. 根据随机过程的表现理论[4,§6]，可以取基本事件空间 $\Omega=\Omega_n$，这里 $\Omega_n=(\omega_n)$ 是全体 T_n 跳跃函数的集合，而且基本事件 ω_n 与样本函数 $x_n(t,\omega_n)$

---

* 0 步也算作有穷步.

重合，即$x_n(t,\omega_n)=\omega_n(t)$，$(t\geqslant 0)$. 这样取定的概率空间记为$(\Omega_n,\mathscr{F}_n,P_n)$，$P_n$完全由$Q$，$S^{(n)}$及一开始分布决定. 今如取由（3.8）定义的分布$S^{(n-1)}$，则由（3.7）及引理3.1，定义在$(\Omega_n,\mathscr{F}_n,P_n)$上的过程$f_{n n-1}(x_n(t,\omega_n))$是$(Q,S^{(n-1)})$过程. 由此易见$f_{nm}(x_n(t,\omega_n))$是定义在$(\Omega_n,\mathscr{F}_n,P_n)$上的$(Q,S^{(m)})$过程$(m<n)$，这里

$$\mathscr{S}_i^{(m)}=\mathscr{S}_i^{(n)}\Big/\sum_{j=0}^{m}\mathscr{S}_j^{(n)}\quad(0\leqslant i\leqslant m),\tag{3.18}$$

此式是（3.8）的推广.

今设已给一列非负数$(\mathscr{S}_i)$，使

$$0<\sum_{i=0}^{\infty}\mathscr{S}_i\leqslant\infty\tag{3.19}$$

（注意此级数可以发散），故至少有一$\mathscr{S}_i>0$. 不失以下讨论的一般性，设$\mathscr{S}_0>0$. 由$(\mathscr{S}_i)$作集中在$(0, 1, \cdots, n)$上的分布$S^{(n)}=(\mathscr{S}_0^{(n)},\mathscr{S}_1^{(n)},\cdots,\mathscr{S}_n^{(n)})$，其中

$$\mathscr{S}_i^{(n)}=\mathscr{S}_i\Big/\sum_{j=0}^{n}\mathscr{S}_j,\tag{3.20}$$

显然，分布列$(S^{(n)})$满足关系（3.18）.

引理3.3 存在概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$，在其上可以定义一列$(Q,S^{(n)})$过程$X_n=\{x_n(t), t\geqslant 0\}$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$，使满足关系（3.7）. 这里$S^{(n)}$由（3.20）决定.

证 固定一分布(v_i)作为开始分布. 如上所述，对每一$n\geqslant 0$，存在$(\Omega_n,\mathscr{F}_n,P_n)$及定义于其上的$(Q,S^{(n)})$过程$\{x_n(t,\omega_n),t\geqslant 0\}$ $(\omega_n\in\Omega_n)$. 对任意$k(\geqslant 1)$个非负整数$n_1, \cdots, n_k$，任取$n\geqslant\max(n_1,\cdots,n_k)$，定义在$(\Omega_n,\mathscr{F}_n,P_n)$上的过程$\{z_{n_i}(t,\omega_n)=f_{nn_i}(x_n(t,\omega_n)),t\geqslant 0\}$ $(\omega_n\in\Omega_n)$也是$(Q,S^{(n_i)})$过程，故与$\{x_{n_i}(t,\omega_{n_i}),t\geqslant 0\}$ $(\omega_{n_i}\in\Omega_{n_i})$有相同的有穷维分布. 今对$t_i\in[0,\infty)$及$j_i\in E$，$(i=1,\cdots,k)$定义$k$维分布

$$\begin{aligned}F_{n_1t_1,\cdots,n_kt_k}(j_1,\cdots,j_k)=P_n(z_{n_i}(t_i,\omega_n)\\=j_i,i=1,\cdots,k),\end{aligned}\tag{3.21}$$

易见此分布不依赖于n的选择，而且有穷维分布族$\{F_{n_1t_1,\cdots,n_kt_k}\}$是

相容的. 故根据柯莫各洛夫定理[4,§6]，存在概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$，及定义于其上的过程列 $X_n = \{x_n(t,\omega), t \geqslant 0\}(\omega \in \Omega), (n = 0,1,2,\cdots)$，使

$$P(x_{n_i}(t_i,\omega) = j_i, i = 1,\cdots,k)$$
$$= F_{n_1t_1,\cdots,n_kt_k}(j_1,\cdots,j_k). \tag{3.22}$$

由此及 (3.21)，特别地知 $x_n(t,\omega)$ 与 $z_n(t,\omega_n)$ 有相同的有穷维分布. 其次，按上引柯氏定理，可取 $\Omega = (\omega)$，其中 $\omega = \omega(n,t)$ 是取值于 E 的二元函数($n = 0,1,\cdots, t \in [0,\infty)$)，并且 $x_n(t,\omega) = \omega(n,t)$. 由于对一切 $n \geqslant m \geqslant 0, P_n(f_{nm}(z_n(t,\omega_n)) = z_m(t,\omega_n)) = 1, P_n(z_n(t,\omega_n)$ 是 T_n 跳跃函数$) = 1$，故可清洗 Ω（参看 [5]）*，以使对每 $\omega, x_n(t,\omega)$ 是 T_n 跳跃函数，而过程 $X_n = \{x_n(t,\omega), t \geqslant 0\}(\omega \in \Omega)$ 则成为$(Q,S^{(n)})$ 过程，并且使 (3.7) 成立. 清洗（缩小）后的概率空间仍记为 $(\Omega,\mathscr{F},P)$，则此空间符合要求. ∎

逐句重复引理 3.3 的证明，作显然的记号上及字面上的修改后，即可证明下面的

引理 3.4 存在概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$，在其上可以定义一列 $(Q,V^{(n)})$ 过程 $X_n = \{x_n(t), t \geqslant 0\}(n = 1,2,\cdots)$，使满足关系 (3.13). 这里 $V^{(n)} = (v_0^{(n)}, v_1^{(n)}, \cdots, v_n^{(n)})(n = 1,2,3,\cdots)$ 是(3.14) 的任一列非负解.

注 3.1 引理 3.3 对一般的满足 (1.6) 的 Q 也成立，证明不需作任何修改.

2.4 连续流入不可能的充要条件

设 Q 满足 (1.6)，而 $X = \{x(t), t \geqslant 0\}$ 为可分 Q 过程. 可以证明：不影响转移概率，对每 $i \in E$，可设 t-集 $S_i(\omega) = (t; x(t,\omega) = i)$ 以概率 1（记为 $a.\ a.$）是有穷或可列多个左闭右开的不相交

---

* 亦可看第 10 篇中文献 [4，第 7 页] ——编者

的区间的和，而且在任一有界区间中，只含有穷多个如此的区间，以后称为 i 区间[1,第149页]；还可证明：在任一定点 t 后有第一个断点，它是跳跃点 $(a.a.)$[1,第227页].

定理 4.1 对任意满足 (1.6) 的可分 Q 过程 $X=\{x(t),t\geqslant 0\}$，t- 集 $\Gamma(\omega)=(t;t$ 是 $x(s,\omega),s\geqslant 0$ 的飞跃点) 是闭集$(a.a.)$.

证 对固定的 ω，称 a 是 $\Gamma(=\Gamma(\omega))$ 的左极限点，如 a 是 Γ 的极限点，但存在 $\varepsilon>0$，使 $x(t)$ 在$[a-\varepsilon,a)$ 中为常数. 记 Γ 的左极限点集为 A，并令 $B=(b:x(t)$ 在 b 不连续，而且在某 $[b-\delta,b)(\delta>0)$ 为常数). 显然 $A\subset B$. 但另方面，因 $[b-\delta,b)$ 必含于某 i 区间之中，而且 B 中不同的 i 不能含于同一 i 区间之中，故 B 是可列集 $(a.a.)$. 记 $B=(b_n)$，则 b_n 不是跳跃点的概率等于 0. 否则，存在 $r\in R$ (可分 t-集)，使 $P(r\in[b_n-\delta,b_n)$而且 b_n 非跳跃点$)>0$. 于是 r 后第一个断点以正概率不是跳跃点，此如上述由(1.6)不可能. 故 B 由跳跃点构成；然而由 A 的定义，A 中的点均非跳跃点，故 $AB=\phi$，从而 $A=\phi(a.\ a.\ )$.

如点 γ 是 Γ 的极限点，但 $\gamma\overline{\in}A$，则在任一$[b-\varepsilon,b)$中必有无穷多个跳跃点(参看[1,第 160 页的系])，故 $\gamma\in\Gamma$. 因而得证 $\Gamma(\omega)$是闭集$(a.\ a.\ )$. ∎

任意固定 $s\geqslant 0$. 由定理 4.1，可以定义

$$\tau_s(\omega)=\max(\gamma:\gamma\leqslant s,\ \gamma\in\Gamma(\omega)),\tag{4.1}$$

换言之，$\tau_s(\omega)$是 s 前的最后一个飞跃点(如右方括号中集是空的，则令 $\tau_s(\omega)=0$). 它是随机变量. 易见存在$(a,\ a)$极限 $\lim\limits_{t\downarrow\tau_s(\omega)}x(t,\omega)$. 实际上，如说不然，必存在 $i\in E$ 使 $P(\overline{\lim\limits_{t\downarrow\tau_s(\omega)}}x(t,\omega)>\underline{\lim\limits_{t\downarrow\tau_s(\omega)}}x(t,\omega)=i)>0$，由于 $P(\tau_s\leqslant s)=1$，故上式表示以正的概率在$[0,s]$中有无穷多个 i 区间，此不可能.

定义 $x(\tau_s,\omega)=\lim\limits_{t\downarrow\tau_s}x(t,\omega)$. 如对任意 $s\geqslant 0$，有 $P(x(\tau_s)=\infty)=0$，则说质点不能自∞"连续地"流入有穷状态. 不久可证，对满足(1.7)的 Q 过程，其充要条件是 $S=\infty$.

设 $X=\{x(t),\ t\geqslant 0\}$是取值于 E 的齐次 Borel 可测马氏过程，

对$[0,\infty)$中任一子集 B，以 $\mathscr{B}_B$ 表示含 ω-集$(x(t)=j)(t\in B, j\in E)$的最小 σ-代数. 称随机变量$\zeta(\leqslant\infty)$为停时，如对任一 $s\geqslant 0$，$(\zeta\leqslant s)\in\mathscr{B}_{[0,s]}$. 记 $\Omega_\zeta=(\zeta<\infty)$，令

$$\mathscr{B}_{[0,\zeta]}=(A: A\subset\Omega_\zeta，对任\ t\geqslant 0,\ A\cap(\zeta\leqslant t)\in\mathscr{B}_{[0,t]})，\tag{4.2}$$

则 $\mathscr{B}_{[0,\zeta]}$是 Ω_ζ 中一 σ-代数. 定义 $\mathscr{B}_{[0,\infty)}$到 $\mathscr{B}_{[0,\infty)}$中的集变换 θ_ζ，使保持和交与补集运算并且使

$$\theta_\zeta(x(t,\omega)\in\Gamma)=(x(t+\zeta,\omega)\in\Gamma)\quad(\Gamma\subset E).\tag{4.3}$$

可以证明[5]，如(1.4)成立，而且 $x(t,\omega)$在 $\zeta(\omega)$右连续($a.\ a.$)，则在 ζ 强马氏性成立：对任 $B\in\mathscr{B}_{[0,\infty)}$，在 Ω_ζ 上，除去某 0 测度集外，有

$$P(\theta_\zeta B\,|\,_{\mathscr{B}_{[0,\zeta]}})=P_{x(\zeta)}(B).\tag{4.4}$$

下面引理 4.1 基本上属于 Дынкин.

引理 4.1 设 ξ 为随机变量，满足条件：

(i) 对任意 $s\geqslant 0$，$t\geqslant 0$，ω-集 $A_s=(\xi>s)\in\mathscr{B}_{[0,s]}$，而且 $A_{s+t}\subseteq A_s\cap\theta_s A_t$；

(ii) 存在 $T>0$，$\alpha>0$，使对一切 $k\in E$，有 $P_k(A_T)<1-\alpha$.

则 $E\xi<\infty$.

证 因 $A_s\in\mathscr{B}_{[0,s]}$，$\theta_s A_T\in\mathscr{B}_{[s,\infty)}$，由马氏性得

$$P_k(A_{s+T})\leqslant P_k(A_s\cap\theta_s A_T)=\int_{A_s}P_{x(s)}(A_T)P_k(\mathrm{d}\omega)$$
$$\leqslant(1-\alpha)P_k(A_s),$$

从而 $P_k(A_{nT})\leqslant(1-\alpha)^n$，并且

$$\begin{aligned}E_k\xi&=\int_0^\infty P_k(\xi>s)\mathrm{d}s\\&=\sum_{n=0}^\infty\int_{nT}^{(n+1)T}P_k(\xi>s)\mathrm{d}s\\&\leqslant T\sum_{n=0}^\infty P_k(\xi>nT)\\&=T\sum_{n=0}^\infty P_k(A_{nT})\leqslant\frac{T}{\alpha}<\infty.\end{aligned}$$

由于 $k\in E$ 任意，故 $E\xi<\infty$. ∎

定理 4.2 设 Q 满足(1.7)而且 $S=\infty$，则对任意的可分、Borel 可测 Q 过程 $X=\{x(t),t\geqslant 0\}$，有 $P(x(\tau_s)=\infty)=0$，这里 $s\geqslant 0$ 任意.

证 如 $R=\infty$，则因第一个飞跃点 $\tau=\infty(a.a.)$，故 $\tau_s=0(a.a)$ 而定理显然正确.

设 $R<\infty$，令 $\eta_i(\omega)=\inf(t:x(t,\omega)=i)$，则 $P_0(\eta_i<\infty)=1$. 引进随机变量

$$\xi_k(\omega)=\inf(t:x(t,\omega)=k,\ x(\tau_t,\omega)=\infty)\quad(k\in E)\tag{4.5}$$

(如右方括号中集是空的，则令 $\xi_k(\omega)=\infty$). 试证 $P(\xi_k=\infty)=1$.

先证 $P(\xi_0=\infty)=1$. 如说不然，则 $P(\xi_0<\infty)>0$，故至少有一 $i\in E$，使 $P_i(\xi_0<\infty)>0$. 由于(1.7)，(2.13)成立. 既然 $P(\xi_0\geqslant\tau)=1$，故

$$P_0(\xi_0<\infty)=P_0(\eta_i<\infty,\ \xi_0-\eta_i<\infty),$$

对 η_i 用强马氏性即得

$$\begin{aligned}P_0(\xi_0<\infty)&=\int_{(\eta_i<\infty)}P_0(\xi_0-\eta_i<\infty\,|\,\mathscr{B}_{[0,\eta_i]})P_0(\mathrm{d}\omega)\\&=\int_{(\eta_i<\infty)}P_{x(\eta_i)}(\xi_0<\infty)P_0(\mathrm{d}\omega).\end{aligned}$$

因为 $x(\eta_i)=i$，$P_0(\eta_i<\infty)=1$，故由上式得 $P_0(\xi_0<\infty)=P_i(\xi_0<\infty)>0$，于是存在 $T>0$，$\alpha>0$，使 $P_0(\xi_0\leqslant T)\geqslant\alpha$. 既然对任意 $k\in E$，有

$$\begin{aligned}&P_0(\xi_0\leqslant T)\leqslant P_0(\eta_k\leqslant T,\ \xi_0-\eta_k\leqslant T)\\&=\int_{(\eta_k\leqslant T)}P_0(\xi_0-\eta_k\leqslant T\,|\,\mathscr{B}_{[0,\eta_k]})P_0(\mathrm{d}\omega)\\&=P_k(\xi_0\leqslant T)P_0(\eta_k\leqslant T),\end{aligned}$$

故 $P_k(\xi_0\leqslant T)\geqslant P_0(\xi_0\leqslant T)\geqslant\alpha$，即 $P_k(\xi_0>T)<1-\alpha\quad(k\in E)$，从而引理 4.1 条件(ii)满足；由 ξ_0 的定义易见那里(i)也满足，故得 $E\xi_0<\infty$. 按引理 2.1 及假设，

$$\lim_{n\to\infty}E\sigma_n(=E_n\sigma_n)=S=\infty,$$

故存在 N，使

$$E\sigma_N > 2E\xi_0. \tag{4.6}$$

另一方面，用迭代法定义

$$\alpha_1 = \inf(t : x(t) = N),$$
$$\beta_1 = \inf(t : t > \alpha_1,\ x(t) = N+1),$$
$$\alpha_k = \inf(t : t > \beta_{k-1},\ x(t) = N-1),$$
$$\beta_k = \inf(t : t > \alpha_k,\ x(t) = N+1) \quad (k > 1).$$

由于 $R < \infty$，易见* $P(\alpha_k < \infty,\ \beta_k < \infty,\ k=1, 2, \cdots) = 1$. 今保存区间$[\alpha_k, \beta_k)(k=1, 2, \cdots)$而抛去其他区间，并将保留区间向左按原序平移，使 α_1 重合于 0，并使各区间相联而不相交，所得为 Q_N 过程 $X_N = \{x_N(t), t \geqslant 0\}$（见(2.7)），$P(x_N(0,\omega) = N) = 1$. 用(2.8)定义 σ_N，显然 $\sigma_N \leqslant \xi_0$，故 $E\sigma_N \leqslant E\xi_0$. 此与(4.6)矛盾，故 $P(\xi_0 = \infty) = 1$.

其次，由 $P(\xi_0 < \infty) \geqslant P(\xi_k < \infty)\prod_{i=1}^{k}\frac{a_i}{a_i + b_i}$，得：

$$P(\xi_k = \infty) = 1 \quad (k \in E). \tag{4.7}$$

今如说定理不真，即对某 $s \geqslant 0$，有 $P(x(\tau_s) = \infty) > 0$，则必存在 $k \in E$，使 $P(x(\tau_s) = \infty,\ x(s) = k) > 0$，故 $P(\xi_k < \infty) \geqslant P(x(\tau_s) = \infty,\ x(s) = k) > 0$，此与(4.7)矛盾. ∎

系 4.1**　如 $S = \infty$，则存在 Ω_0，$P(\Omega_0) = 1$，使 $\omega \in \Omega_0$ 时，t-集 $H_\omega = (t : \lim_{s \downarrow t} x(s, \omega) = \infty$ 且存在 $\varepsilon = \varepsilon(\omega) > 0$ 使$(t, t+\varepsilon)$中没有飞跃点)是空集.

证　只要令 $\Omega_0 = \bigcap_k (\xi_k = \infty)$.

反之，如 $S < \infty$，由下面的系 7.1，知存在 Q 过程使定理 4.2 及系 4.1 不成立，故 $S = \infty$ 是不可能“连续”流入有穷状态的充要条件. ∎

---

* 这也可从定理 5.2 的证(i)推出.

** 此处对最初发表论文中的系 4.1 作了微小但必要的更正. ——编者

2.5 一般 Q 过程变换为 Doob 过程

是否可变任一 Q 过程为 Doob 过程? 本节给出一般方法. 此时 Q 不变而转移概率的变化则可控制得很小*.

定义 5.1 使(1.6)成立的矩阵 Q 称为原子的, 如满足

$$P(\xi_n=j|\xi_{n-1}=i)=\frac{q_{ij}}{q_i} \quad (i,\ j\in E, i\neq j) \tag{5.1}$$

的马氏链$(\xi_n)(n\geqslant 0)$具有性质:对任一集 $R\subset E$, 不论开始分布如何, 存在正整数 $N(=N(\omega))$, 使

$$P(\xi_n\in R,\ n\geqslant N)=0 \text{ 或 } 1. \tag{5.2}$$

称 Q 过程为原子的, 如 Q 是原子的;而由(5.1)定义的马氏链(ξ_n), 称为此 Q 过程的嵌入马氏链.

易见生灭过程是原子的[1,第 113 页系].

今设 $X=\{x(t),\ t\geqslant 0\}$为可分的 Borel 可测齐次马氏过程, τ 为其第一个飞跃点;又设 ζ 为停时, $P(\zeta<\infty)=1$, $P(x(\zeta)=\infty)=0$, $\tau_\zeta^{(n)}$ 为 ζ 后的第 n 个跳跃点, $\tau_\zeta=\lim\limits_{n\to\infty}\tau_\zeta^{(n)}$ 是 ζ 后的第一个飞跃点, 易见 $\tau_\zeta^{(n)}$ 为停时.

定理 5.1 如 Q 过程 $X=\{x(t),\ t\geqslant 0\}$是原子的, 且 $P(\tau<\infty)=1$, 则

$$P(\theta_{\tau_\zeta}B|_{\mathscr{B}_{[0,\tau_\zeta]}})=C, \tag{5.3}$$

这里 $B\in\mathscr{B}_{[0,\infty)}$, $\mathscr{B}_{[0,\tau_\zeta]}$是含一切 $\mathscr{B}_{[0,\tau_\zeta^{(n)}]}(n\geqslant 0)(\tau_\zeta^{(0)}=\zeta)$的最小 σ-代数, 又 C 为不依赖于 ζ 的常数.

证 除去一 0 测集后, $\tau_\zeta^{(n)}<\tau_\zeta^{(n+1)}$, $\Omega_{\tau_\zeta^{(n)}}=\Omega_{\tau_\zeta^{(n+1)}}$. 先证 $\mathscr{B}_{[0,\tau_\zeta^{(n)}]}\subset\mathscr{B}_{[0,\tau_\zeta^{(n+1)}]}$. 任取 $A\in\mathscr{B}_{[0,\tau_\zeta^{(n)}]}$, 则 $A\subset\Omega_{\tau_\zeta^{(n+1)}}$, 又

$$(A,\ \tau_\zeta^{(n+1)}\leqslant t)=(A,\ \tau_\zeta^{(n)}\leqslant t)\cap(\tau_\zeta^{(n+1)}\leqslant t, \tau_\zeta^{(n)}\leqslant t)$$

---

* 参看定理 6.4 及 8.2 的证明.

$$=(A,\ \tau_\zeta^{(n)}\leqslant t)\cap\bigcup_{v=1}^{\infty}\bigcap_{u=v}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{2^u-1}$$

$$\left[\left(\frac{(k-1)t}{2^u}<\tau_\zeta^{(n)}\leqslant\frac{kt}{2^u}\right)\cap(\text{存在 } j, k<j\leqslant 2^u,\right.$$

$$\left.\text{使 } x\left(\frac{jt}{2^u}\right)\neq x\left(\frac{kt}{2^u}\right)\right)\Bigg]\in\mathscr{B}_{[0,t]},$$

故 $A\in\mathscr{B}_{[0,\tau_\zeta^{(n+1)}]}$. 于是 $\mathscr{B}_{[0,\tau_\zeta^{(n)}]}\uparrow\mathscr{B}_{[0,\tau_\zeta)}$. 由[4,定理 4.3]及关于 $\tau_\zeta^{(n)}$ 的强马氏性(4.4)，得

$$\begin{aligned}P(\theta_{\tau_\zeta}B\,|\,\mathscr{B}_{[0,\tau_\zeta)})&=\lim_{n\to\infty}P(\theta_{\tau_\zeta}B\,|\,\mathscr{B}_{[0,\tau_\zeta^{(n)}]})\\&=\lim_{n\to\infty}P_{x(\tau_\zeta^{(n)})}(\theta_\tau B).\end{aligned}\tag{5.4}$$

任意取实数 $\alpha>0$，令 $A=(i:P_i(\theta_\tau B)>\alpha)$，由(5.4)

$$P(\omega:P(\theta_{\tau_\zeta}B\,|\,\mathscr{B}_{[0,\tau_\zeta)})>\alpha)$$

$$=P(\omega:\text{存在 } N(=N(\omega)),\ \text{使 } n\geqslant N \text{ 时},\ x(\tau_\zeta^{(n)})\in A).$$

然而$(x(\tau_\zeta^{(n)}))(n=0,1,2,\cdots)$是 Q 过程的嵌入马氏链，开始分布为 $r_i=P(x(\zeta)=i)(i\geqslant 0)$，由原子性得

$$P(\omega:P(\theta_{\tau_\zeta}B\,|\,\mathscr{B}_{[0,\tau_\zeta)})>\alpha)=0 \text{ 或 } 1.$$

由于 α 为任一正数，故以概率 1

$$P(\theta_{\tau_\zeta}B\,|\,\mathscr{B}_{[0,\tau_\zeta)})=C(\zeta),$$

这里 $C(\zeta)$表一常数，它可能依赖于 ζ，更精确些，可能依赖于开始分布 $r_i=P(x(\zeta)=i)(i\in E)$. 利用马氏链理论中下列简单事实：设$(x_n)$为马氏链，$f$ 为实值函数，如对任意开始分布，$f(x_n)$当 $n\to\infty$时以概率 1 收敛于常数，则此常数与开始分布无关. 因此，在此事实中取 $x_n=x(\tau_\zeta^{(n)})$，$f(x_n)=P_{x_n}(\theta_\tau B)$，即得 $C(\zeta)$与 ζ 无关. ∎

现在进一步设 Q 满足(1.7)而且 $R<\infty$. 用迭代法定义

$$\tau_1(=\tau)\text{为 } X \text{ 的第一个飞跃点},\tag{5.5}$$

$$\beta_1^{(n)}=\inf(t:t\geqslant\tau_1,\ x(t)\leqslant n);\tag{5.6}$$

如 τ_{m-1}，$\beta_{m-1}^{(n)}$已定义，则令

$$\tau_m\ \text{为}\ \beta_{m-1}^{(n)}\text{后的第一个飞跃点},\tag{5.7}$$

$$\beta_m^{(n)}=\inf(t:t\geqslant\tau_m,\ x(t)\leqslant n).\tag{5.8}$$

此外，令 $\beta_{mk}^{(n)}$ 为 $\beta_m^{(n)}$ 后的第 k 个跳跃点.

对 Q 过程 $X=\{x(t),\ t\geqslant 0\}$ 施行 $C(\tau_m,\ \beta_m^{(n)})$ 变换后，所得过程记为 $X_n=\{x_n(t),\ t\geqslant 0\}$.

定理 5.2 如 $R<\infty$，则 X_n 为 $(Q,\ V^{(n)})$ 过程，其中 $V^{(n)}=(v_0^{(n)},\ v_1^{(n)},\ \cdots,\ v_n^{(n)})$ 满足(3.14).

证 为证此只需要证明下列结论：

(i)对一切 n，$m=1,\ 2,\ \cdots$，$P(\beta_m^{(n)}<\infty)=1$；

(ii)对任意固定的 $n\geqslant 1$，$x(\beta_m^{(n)})(m=1,\ 2,\ \cdots)$ 独立同分布，而且 $v_i^{(n)}=P(x(\beta_m^{(n)})=i)$ 满足(3.14)；

(iii)对任意固定的 $n\geqslant 1$，随机变量族

$$(x(\beta_{mk}^{(n)});(\beta_{m,k+1}^{(n)}-\beta_{mk}^{(n)}),k=0,1,2,\cdots)\quad(\beta_{m0}^{(n)}=\beta_m^{(n)})$$

不依赖于随机变量族

$$(x(\beta_{jk}^{(n)});\beta_{jk}^{(n)}:\ j=0,\ 1,\ \cdots,\ m-1;\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots).$$

如果这些结论得以证明，则由于 X_n 的密度矩阵是 Q(这由 Q 中元的概率意义(2.10)、(2.11)推出)，而且在飞跃点上的分布为 $P(x(\beta_m^{(n)})=i)=v_i^{(n)}(0\leqslant i\leqslant n)$，故它是 $(Q,\ V^{(n)})$ 过程.

(i)—(iii)的证明分成四步：

(A)由 $R<\infty$，存在 $s>0$ 及 $l\in E$，使

$$P(\beta_1^{(l)}<\infty)\geqslant P(\tau_1<s,\ x(s)\leqslant l)>0. \tag{5.9}$$

由(1.7)可见* 存在 $T>0$，$\alpha>0$，使对任一 $k\in E$，有 $P_k(\beta_1^{(l)}\leqslant T)\geqslant\alpha$. 从而根据引理 4.1 立得 $E\beta_1^{(l)}<\infty$，故有 $P(\beta_1^{(l)}<\infty)=1$. 今考虑 $y(t,\ \omega)=x(\beta_1^{(l)}(\omega)+t,\ \omega)$，$t\geqslant 0$，由关于 $\beta_1^{(l)}$ 的强马氏性，它也是 Q 过程. 仿(5.6)对此 $y(t,\ \omega)$ 定义的 $\beta_1^{(l)}(\omega)$ 记为 $\beta_{1y}^{(l)}(\omega)$，则由上知 $P(\beta_{1y}^{(l)}(\omega)<\infty)=1$. 于是由 $\beta_2^{(l)}(\omega)=\beta_1^{(l)}(\omega)+\beta_{1y}^{(l)}(\omega)$ 得 $P(\beta_2^{(l)}<\infty)=1$. 如此继续，得证 $P(\beta_m^{(l)}<\infty)=1(m\geqslant 1)$. 既然当 $n\geqslant l$ 时，$\beta_m^{(n)}(\omega)\leqslant\beta_m^{(l)}(\omega)$，故(i)对 $n\geqslant l$ 正确.

(B)固定 $n(\geqslant l)$. 令 $\tau_0\equiv 0$. 取 $B_i=(x(\beta_0^{(n)})=i)$，并于定理

---

* 实际上，由(5.9)至少有一 $j\in E$ 使 $P_j(\beta_1^{(l)}<\infty)>0$. 由 $R<\infty$ 知 $P_0(\beta_1^{(l)}<\infty)>0$. 故有 T，α 使 $P_0(\beta_1^{(l)}\leqslant T)\geqslant\alpha$，于是 $P_k(\beta_1^{(l)}\leqslant T)\geqslant P_0(\beta_1^{(l)}\leqslant T)\geqslant\alpha$.

5.1 中令 $\zeta(\omega)=\beta_{m-1}^{(n)}(\omega)$，$(m=2,3,\cdots)$，得知诸事件

$$\theta_{\tau_m}B_i=(x(\beta_m^{(n)})=i)\quad(i=0,1,\cdots,n)$$

与 $\mathscr{B}_{[0,\tau_m)}$ 中的事件独立，特别与事件 $(x(\beta_j^{(n)})=i)$，$j<m$，$i=0,1,\cdots,n$ 及其交独立，从而诸 $x(\beta_m^{(n)})(m\geqslant1)$ 相互独立. 再在定理 5.1 中顺次令 $\zeta(\omega)=0$，$\zeta(\omega)=\beta_1^{(n)}(\omega)$，$\zeta(\omega)=\beta_2^{(n)}(\omega)$，…，可见诸事件 $\theta_{\tau_1}B_i=(x(\beta_1^{(n)})=i)$，$\theta_{\tau_2}B_i=(x(\beta_2^{(n)})=i)$…有相同的概率.

(C) 为证 (iii) 对 $n(\geqslant l)$ 成立，只需证 $(x(\beta_{mk}^{(n)})$，$\beta_{m,k+1}^{(n)}-\beta_{mk}^{(n)}$，$k=0,1,2,\cdots)$ 与 $\mathscr{B}_{[0,\tau_m)}$ 中的事件独立. 对任二组整数 $k_1<k_2<\cdots<k_u$，$r_1<r_2<\cdots<r_v$，有

$$\begin{aligned}(x(\beta_{mk_1}^{(n)})=i_1,\cdots,x(\beta_{mk_u}^{(n)})=i_u;\beta_{m,r_1+1}^{(n)}-\beta_{mr_1}^{(n)}\\>t_1,\cdots,\beta_{m,r_v+1}^{(n)}-\beta_{mr_v}^{(n)}>t_v)\\=\theta_{\tau_m}B,\end{aligned}$$

其中 $B=(x(\beta_{0k_1}^{(n)})=i_1,\cdots,x(\beta_{0k_u}^{(n)})=i_u;\beta_{0,r_1+1}^{(n)}-\beta_{0r_1}^{(n)}>t_1,\cdots,\beta_{0,r_v+1}^{(n)}-\beta_{0r_v}^{(n)}>t_v)$.

然后仿 (B) 利用定理 5.1 即可.

(D) 证 (i)、(ii)、(iii) 中的结论对任一 $n(\geqslant1)$ 成立. 只要证 $P(\beta_k^{(1)}<\infty)=1$ 即可. 如 $v_1^{(l)}=P(x(\beta_1^{(l)})=1)>0$，则由 (A) 及 (B) 得 $P(\beta_1^{(1)}<\infty)=v_1^{(l)}\sum_{n=0}^{\infty}(1-v_1^{(l)})^n=1$；如 $v_1^{(l)}=0$，则取 $k(\leqslant l)$，使 $v_k^{(l)}>0$，于是 $P(\beta_1^{(1)}<\infty)=v_k^{(l)}c_{k1}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(1-v_k^{(l)}c_{k1})^n=1$. 然后利用 (A) 中之方法得证 $P(\beta_k^{(l)}<\infty)=1$，$(k\geqslant1)$. 故 (i) 完全得证. 为完全证明 (ii)、(iii)，只要在 (B)、(C) 中以 1 换 l；最后，注意 $g_{n+1,n}(x_{n+1}(t,\omega))=x_n(t,\omega)$，故 $(v_i^{(n)})$ 满足 (3.14). ■

对于 $R<\infty$，$S=\infty$ 的 Q，尚可如下把 Q 过程变为 Doob 过程. 代替 (5.5)—(5.8)，令

$$\tau_1\text{ 为 }X\text{ 的第一个飞跃点，}\tag{5.10}$$

$$\alpha_1^{(n)}=\inf(t:t\geqslant\tau_1,t\text{ 为飞跃点},x(t)\leqslant n);\tag{5.11}$$

$$\tau_m\text{ 为 }\alpha_{m-1}^{(n)}\text{后的第一个飞跃点，}\tag{5.12}$$

$$\alpha_m^{(n)}=\inf(t: t\geqslant\tau_m, t \text{ 为飞跃点}, x(t)\leqslant n), \tag{5.13}$$

此外，令 $\alpha_{mk}^{(n)}$ 为 $\alpha_m^{(n)}$ 后的第 k 个跳跃点.

对 Q 过程 X 施行 $C(\tau_m, \alpha_m^{(n)})$ 变换后，所得过程也记为 $X_n=\{x_n(t), t\geqslant 0\}$.

定理 5.3 设 $R<\infty$, $S=\infty$, 则 $X_n=\{x_n(t), t\geqslant 0\}(n\geqslant l$, l 为某非负数)为$(Q, \mathscr{S}^{(n)})$过程，其中 $\mathscr{S}^{(n)}=(\mathscr{S}_0^{(n)}, \mathscr{S}_1^{(n)}, \cdots, \mathscr{S}_n^{(n)})$满足(3.8).

证 取 $s>0$，使 $P(\tau_1<s)>0$. 由定理 4.2，$P(x(\tau_s)\neq\infty)=1$，这里 τ_s 是 s 以前的最后一个飞跃点. 故存在 $l\in E$，使 $P(\tau_1\leqslant\tau_s, x(\tau_s)=l)=P(\tau_1<s, x(\tau_s)=l)>0$，从而

$$P(\alpha_1^{(l)}<\infty)\geqslant P(\tau_1\leqslant\tau_s, x(\tau_s)=l)>0,$$

故得到了与(5.9)类似的式子，然后只要逐句重复上定理的证明至(D)以前，并作显然的改变即可. ∎

2.6 $S<\infty$时 Q 过程的构造

固定任一满足(1.7)的 Q，使 $R<\infty$. 考虑方程组(3.14)，任意给定 $v_1^{(1)}$，$0\leqslant v_1^{(1)}\leqslant 1$，则 $v_0^{(1)}$ 唯一决定；如果$(v_0^{(n)}, \cdots, v_n^{(n)})$已求出，则任意给定 $v_{n+1}^{(n+1)}$，$0\leqslant v_{n+1}^{(n+1)}\leqslant 1$ 后，可唯一决定$(v_0^{(n+1)}, \cdots, v_{n+1}^{(n+1)})$. 因此给出一数列$(v_n^{(n)})$后(以后简记为$(v_n)$，即 $v_n=v_n^{(n)}$)，可唯一决定(3.14)的一组解. 为使此组解中每$(v_0^{(n)}, \cdots, v_n^{(n)})(n=1, 2, \cdots)$均是一概率分布，不难看出，充要条件是$(v_n)$满足条件

$$1\geqslant v_1\geqslant 0,$$

$$1\geqslant v_n\geqslant\frac{v_{n+1}(z-z_{n+1})}{(z-z_n)-v_{n+1}(z_{n-1}-z_n)}\geqslant 0 \quad (n\geqslant 1). \tag{6.1}$$

由定理 5.2(ii)，立得

引理 6.1 设已给 Q 过程 $X=\{x(t), t\geqslant 0\}$，使 $R<\infty$，则序列(v_n)：

$$v_n=P(x(\beta_1^{(n)})=n) \quad n\geqslant 1 \tag{6.2}$$

满足(6.1).

本节中，以下恒设 $R<\infty$，$S<\infty$.

重要的是，以后会证明：设已给满足(6.1)的序列(v_n)，则必存在 Q 过程 $X=\{x(t),t\geqslant 0\}$，满足(6.2)，而且此过程是唯一的*. 为此要作相当准备.

设已给一列满足(6.1)的(v_n)，它决定(3.14)的一组解记为$(V^{(n)})$，$V^{(n)}=(v_0^{(n)},\cdots,v_n^{(n)})$. 由引理 3.4，可在某空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上作一列$(Q,V^{(n)})$过程 $X_n=\{x_n(t),t\geqslant 0\}$ $(n\geqslant 1)$，并且

$$g_{nm}(x_n(t,\omega))=x_m(t,\omega)\quad(n\geqslant m),\tag{6.3}$$

换言之，对 $x_n(t,\omega),t\geqslant 0$ 施行 $C(\tau_i^{(n,m)}(\omega),\beta_i^{(n,m)}(\omega))$变换后即得$x_m(t,\omega),t\geqslant 0$，这里 $\tau_i^{(n,m)}$，$\beta_i^{(n,m)}$ 仿(5.5)—(5.8)对过程 X_n 定义，即

$$\tau_1^{(n,m)} \text{ 为 } X_n \text{ 的第一个飞跃点},\tag{6.4}$$

$$\beta_1^{(n,m)}=\inf(t: t\geqslant\tau_1^{(n,m)},\ x_n(t)\leqslant m);\tag{6.5}$$

$$\tau_i^{(n,m)} \text{ 为 } \beta_{i-1}^{(n,m)}\text{后第一个飞跃点},\tag{6.6}$$

$$\beta_i^{(n,m)}=\inf(t: t\geqslant\tau_i^{(n,m)},\ x_n(t)\leqslant m).\tag{6.7}$$

记

$$\tau_i^{(n)} \text{ 为 } t_n \text{ 的第 } i \text{ 个飞跃点},\tag{6.8}$$

$$\tau_{ij}^{(n)}\text{为 } \tau_i^{(n)} \text{ 后的第 } j \text{ 个跳跃点}.\tag{6.9}$$

先考虑一特殊情况，即 $v_n=1(n\geqslant 1)$时，此(v_n)所决定的(3.14)的解记为$(\pi^{(n)})$，显然

$$\pi^{(n)}=(\pi_0^{(n)},\cdots,\pi_{n-1}^{(n)},\pi_n^{(n)})=(0,\cdots,0,1).\tag{6.10}$$

引理 6.2 对$(Q,\pi^{(n)})$过程 X_n，令 $\xi^{(n,m)}$表示使 $\beta_i^{(n,m)}<\beta_1^{(n,0)}$ 的 i 的个数，则

$$E\xi^{(n,m)}=\sum_{i=0}^{\infty}P(\beta_i^{(n,m)}<\beta_1^{(n,0)})=\frac{z}{z-z_m}.\tag{6.11}$$

证 定义 $\eta_i=1$ 或 0，视 $\beta_i^{(n,m)}<\beta_1^{(n,0)}$ 与否而定. 则 $E\xi^{(n,m)}=$

* 有相同转移概率的 Q 过程算作同一 Q 过程. 见 2.1 节.

$\sum_{i=1}^{\infty} E\eta_i = \sum_{i=1}^{\infty} P(\beta_i^{(n,m)} < \beta_1^{(n,0)})$. 但 $P(\beta_i^{(n,m)} < \beta_1^{(n,0)}) = (1 - c_{m0})^{i-1}$，故由(2.16)得

$$E\xi^{(n,m)} = \sum_{i=1}^{\infty}(1 - c_{m0})^{i-1} = \frac{1}{c_{m0}} = \frac{z}{z - z_m}.$$ ∎

对$(Q, \pi^{(n)})$过程 $X_n = \{x_n(t), t \geqslant 0\}$，定义

$$T^{(n,r)}(\omega) = \beta_1^{(n,r)}(\omega) - \tau_1^{(n)}(\omega)\ (n > r), \tag{6.12}$$

故 $T^{(n,r)}$是自 $\tau_1^{(n)}$ 算起，初次到达 r 的时间. 注意 $P(x_n(\tau_1^{(n)}) = n) = 1$，故 $ET^{(n,r)}$是在"质点自 n 出发，到达∞后立刻回到 n"的条件下，质点初次到达 r 的平均时间，因此，它不超过在"自 n 出发，到达∞后'连续地'回到有穷状态"的条件下，此时间的平均值 $\sum_{k=r+1}^{\infty} e_k$（见(2.2)）. 此直观上显然正确的事实可如下严格证明.

引理 6.3 对$(Q, \pi^{(n)})$过程，$ET^{(n,r)} \leqslant \sum_{k=r+1}^{\infty} e_k \leqslant S \quad (n > r \geqslant 0)$.

证 首先注意一简单事实：设有差分方程

$$\mathscr{D}_k = \frac{1}{c_k}(1 - \mathrm{e}^{-c_k\varepsilon}) + \frac{a_k}{c_k}\mathscr{D}_{k-1} + \frac{b_k}{c_k}\mathscr{D}_{k+1}$$
$$(0 < n < k < N), \tag{6.13}$$

其中 $c_k = a_k + b_k$，$a_k > 0$，$b_k > 0$，$0 < \varepsilon \leqslant \infty$（如 $\varepsilon = \infty$，则令 $\mathrm{e}^{-c_k\varepsilon} = 0$），在边值条件 $\mathscr{D}_n = 0$，$\mathscr{D}_N = c\ (c \geqslant 0)$下之解记为$(\mathscr{D}_n^{(c)}, \mathscr{D}_{n+1}^{(c)}, \cdots, \mathscr{D}_N^{(c)})$，则 $\mathscr{D}_k^{(c)} \geqslant \mathscr{D}_k^{(0)} \quad (n \leqslant k \leqslant N)$.

今以 f_i 表示对$(Q, \pi^{(n)})$过程自 i 出发初次回到 $i-1$ 的平均时间，则象导出(2.12′)一样，得

$$f_i = \frac{a_i}{c_i} \cdot \frac{1}{c_i} + \frac{b_i}{c_i}\left(\frac{1}{c_i} + f_{i+1} + f_i\right) \quad (1 \leqslant i \leqslant n) \tag{6.14}$$

或 $f_i = \frac{1}{a_i} + \frac{b_i}{a_i} f_{i+1}\ (1 \leqslant i \leqslant n)$. 故如已知 f_{n+1}，则

$$f_i = \frac{1}{a_i} + \sum_{k=0}^{n-1-i} \frac{b_i b_{i+1} \cdots b_{i+k}}{a_i a_{i+1} \cdots a_{i+k} a_{i+k+1}} + \frac{b_i b_{i+1} \cdots b_n}{a_i a_{i+1} \cdots a_n} f_{n+1}, \tag{6.15}$$

故如能证 $f_{n+1} \leqslant e_{n+1}$，则由(6.15)及(2.2)立得 $f_i \leqslant e_i$，而
$$ET^{(n,r)} \leqslant \sum_{i=r+1}^{\infty} f_i \leqslant \sum_{i=r+1}^{\infty} e_i = S.$$

为证 $f_{n+1} \leqslant e_{n+1}$，考虑 $N>k>n$. 以 $\overline{\mathscr{D}}_k^{(N)}$ 表自 k 出发初次到达 n 的平均时间，但当到达 N 时，立刻回到 n(更精确些，$\overline{\mathscr{D}}_k^{(N)}$ 为对(Q,π_n)过程，自 k 出发初次到达含二点之集$\{n, N\}$的平均时间)；而 $\overline{\overline{\mathscr{D}}}_k^{(N)}$ 表示对 Q_N-过程[见(2.7)]自 k 出发初次到达 n 的平均时间. 易见$(\overline{\mathscr{D}}_k^{(N)})$与$(\overline{\overline{\mathscr{D}}}_k^{(N)})$$(n \leqslant k \leqslant N)$分别是(6.13)，当 $\varepsilon = \infty$ 时在边界条件 $\mathscr{D}_n = 0$，$\mathscr{D}_N = 0$ 及 $\mathscr{D}_n = 0$，$\mathscr{D}_N = c$ $\left(\geqslant \frac{1}{a_N + b_N}\right)$下的解，故由上述事实 $\overline{\mathscr{D}}_{n+1}^{(N)} \leqslant \overline{\overline{\mathscr{D}}}_{n+1}^{(N)}$. 但 $\overline{\mathscr{D}}_{n+1}^{(N)} \uparrow f_{n+1}$；$\overline{\overline{\mathscr{D}}}_{n+1}^{(N)} \uparrow e_{n+1}$，$N \to \infty$[注意 $\overline{\overline{\mathscr{D}}}_{n+1}^{(N)} = e_{n+1}^{(N)}$，见(2.12′)]，故
$$f_{n+1} \leqslant e_{n+1}. \qquad \blacksquare$$

对任 ε，$0<\varepsilon \leqslant \infty$，考虑函数
$$f_\varepsilon(x) = x，\text{如 } 0 \leqslant x < \varepsilon；\ = \varepsilon，\text{如 } x \geqslant \varepsilon. \tag{6.16}$$
设 $\xi(\geqslant 0)$是具有分布密度 $ce^{-cy}(c>0)$的随机变量，则易见$Ef_\varepsilon(\xi) = \frac{1}{c}(1-e^{-c\varepsilon})$，特别，$Ef_\infty(\xi) = \frac{1}{c}$.

对$(Q,\pi^{(n)})$过程及 $n>r$，定义
$$T_\varepsilon^{(n,r)}(\omega) = \sum_{\tau_1^{(n)} \leqslant \tau_{ij}^{(n)} < \beta_1^{(n,r)}} f_\varepsilon(\tau_{ij+1}^{(n)}(\omega) - \tau_{ij}^{(n)}(\omega))，\tag{6.17}$$
特别，$T_\infty^{(n,r)} = T^{(n,r)}$. 直觉地说，将$(Q,\pi^{(n)})$过程 $X_n = \{x_n(t), t \geqslant 0\}$的常数区间如下变形：如其长不小于 ε，则缩短之使其长变为 ε，如长小于 ε，则保留不变. 于是 $T_\varepsilon^{(n,r)}(\omega)$是$[\tau_1^{(n)}(\omega), \beta_1^{(n,r)}(\omega))$中变形后的区间的总长.

引理 6.4 对$(Q,\pi^{(n)})$过程，
$$ET_\varepsilon^{(n,r)} \leqslant \sum_{k=r+1}^{\infty}\left[\frac{1}{a_k}(1-e^{-c_k\varepsilon}) + \sum_{l=0}^{\infty}\frac{b_k b_{k+1}\cdots b_{k+l}}{a_k a_{k+1}\cdots a_{k+l}} \times \frac{(1-e^{-c_{k+l+1}\varepsilon})}{a_{k+l+1}}\right] \leqslant S. \tag{6.18}$$

证 $(Q,\pi^{(n)})$过程的 k 区间经如上变形后，有平均长度为

$E_k f_\varepsilon(\beta)=\dfrac{1}{c_k}(1-e^{-c_k\varepsilon})$[见(2.10)]，然后重复引理 6.3 的证明，只要换$\dfrac{1}{c_k}$、$\dfrac{1}{a_k}$为$\dfrac{1}{c_k}(1-e^{-c_k\varepsilon})$及$\dfrac{1}{a_k}(1-e^{-c_k\varepsilon})$即可. ∎

由于(6.3)，对固定 $\varepsilon>0$，有 $T_\varepsilon^{(n,0)}(\omega)\leqslant T_\varepsilon^{(n+1,0)}(\omega)$，令 $T_\varepsilon(\omega)=\lim\limits_{n\to\infty}T_\varepsilon^{(n,0)}(\omega)$.

引理 6.5 对$(Q,\pi^{(n)})$过程，$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}ET_\varepsilon=0$；$P(\lim\limits_{\varepsilon\to 0}T_\varepsilon=0)=1$.

证 由
$$ET_\varepsilon^{(n,0)}\leqslant S_\varepsilon=\sum_{k=1}^{\infty}\Bigg[\frac{1}{a_k}(1-e^{-c_k\varepsilon})+\sum_{l=0}^{\infty}\frac{b_k b_{k-1}\cdots b_{k-l}}{a_k a_{k+1}\cdots a_{k-l}}\frac{(1-e^{-c_{k+l+1}\varepsilon})}{a_{k+l-1}}\leqslant S<\infty,$$
得 $ET_\varepsilon\leqslant S_\varepsilon$，$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}ET_\varepsilon\leqslant\lim\limits_{\varepsilon\to 0}S_\varepsilon=0$. 又由 $T_\varepsilon(\omega)$关于 ε 的单调性，存在$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}T_\varepsilon(\omega)=T(\omega)\geqslant 0$. 根据积分单调定理 $ET=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}ET_\varepsilon=0$，从而 $P(T=0)=1$. ∎

今令
$$L_{nm}^{(i)}(\omega)=\begin{cases}\beta_i^{(n,m)}(\omega)-\tau_i^{(n,m)}(\omega), & 如\ \beta_i^{(n,m)}(\omega)<\beta_1^{(n,0)}(\omega),\\ 0, & 如\ \beta_i^{(n,m)}(\omega)\geqslant\beta_1^{(n,0)}(\omega).\end{cases}\tag{6.17'}$$
故 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}L_{nm}^{(i)}(\omega)$ 是经(6.3)自 X_n 得 X_m 时，在$[\tau_1^{(n)},\beta_1^{(n,0)}]$中所抛去区间之总长. 由(6.3)可见
$$\sum_{i=1}^{\infty}L_{nm}^{(i)}(\omega)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}L_{n+1,m}^{(i)}(\omega),$$
故存在 $L_m(\omega)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{\infty}L_{nm}^{(i)}(\omega)$.

引理 6.6 对$(Q,\pi^{(n)})$过程，$\lim\limits_{m\to\infty}EL_m=0$，$P(\lim\limits_{m\to\infty}L_m=0)=1$.

证 由$(Q,\pi^{(n)})$过程 $X_n=\{x_n(t),t\geqslant 0\}$的构造，$\beta_i^{(n,m)}-\tau_i^{(n,m)}$不依赖*于事件$(\beta_i^{(n,m)}<\beta_1^{(n,0)})$，而且 $\beta_i^{(n,m)}-\tau_i^{(n,m)}(i=1,2,\cdots)$

---

* 即对任意实数 a，事件$(\beta_i^{(n,m)}-\tau_i^{(n,m)}<a)$，$(\beta_i^{(n,m)}<\beta_i^{(n,0)})$独立.

同分布，故由引理 6.2 及 $\tau_1^{(n,m)}=\tau_1^{(n)}$，得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}EL_{nm}^{(i)}&=\sum_{i=1}^{\infty}E(\beta_i^{(n,m)}-\tau_i^{(n,m)}\mid\beta_i^{(n,m)}<\beta_1^{(n,0)})P(\beta_i^{(n,m)}<\beta_1^{(n,0)})\\&=\sum_{i=1}^{\infty}E(\beta_i^{(n,m)}-\tau_i^{(n,m)})P(\beta_i^{(n,m)}<\beta_1^{(n,0)})\\&=E(\beta_1^{(n,m)}-\tau_1^{(n,m)})\sum_{i=1}^{\infty}P(\beta_i^{(n,m)}<\beta_1^{(n,0)})\\&=E(\beta_1^{(n,m)}-\tau_1^{(n)})\frac{z}{z-z_m}.\end{aligned}\tag{6.18'}$$

再由引理 6.3 及(2.2)、(2.4)，经简单计算后

$$\sum_{i=1}^{\infty}EL_{nm}^{(i)}\leqslant\sum_{k=m+1}^{\infty}e_k\cdot\frac{z}{z-z_m}\leqslant z\sum_{k=m}^{\infty}\frac{b_1b_2\cdots b_k}{a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}}.\tag{6.19}$$

注意 $z<b_0R<\infty$，$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_1b_2\cdots b_k}{a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}}<S<\infty$，故

$$\lim_{m\to\infty}EL_m=\lim_{m\to\infty}\Big(\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}EL_{nm}^{(i)}\Big)=0.$$

再由 $L_m(\omega)\geqslant L_{m+1}(\omega)$即得 $P(\lim_{m\to\infty}L_m=0)=1$. ∎

由(6.7)及(6.3)，可见 $\beta_i^{(n,0)}(\omega)\leqslant\beta_i^{(n+1,0)}(\omega)$，故存在极限 $\beta_i^{(0)}(\omega)=\lim_{n\to\infty}\beta_i^{(n,0)}(\omega)$. 由定义 $P(\lim_{i\to\infty}\beta_i^{(n,0)}=\infty)=1$ $(n\geqslant1)$，既然 $\beta_i^{(n,0)}(\omega)\leqslant\beta_i^{(0)}(\omega)$，故得

$$P(\lim_{i\to\infty}\beta_i^{(0)}=\infty)=1.\tag{6.20}$$

以下"几乎一切 t"系对 Lebesgue 测度而言.

定理 6.1 以概率 1，$(Q,\pi^{(n)})$过程的样本函数 $x_n(t,\omega)$当 $n\to\infty$时对几乎一切 t 收敛.

证 除去一 0 测度集后，可设对每一 $\omega\in\Omega$，$x_n(t,\omega)$，在任一有限区间中只有有限多个 i 区间($n\geqslant0$，$i\in E$). 如向左平移使每 $x_n(t,\omega)$为常数的区间，而且每区间平移的距离不大于 ε，则在 $[0,\beta_1^{(n,0)}(\omega))$中，使 $x_n(t,\omega)$不等于 $x_m(t,\omega)$ $(n>m)$的点 t 所成区间的总长不超过 $\varepsilon+T_\varepsilon^{(n)}(\omega)<\varepsilon+T_\varepsilon(\omega)$. 固定 k，取 $n>m>l$

($>k$). 由于 $\beta_1^{(n,0)}(\omega)\geqslant\beta_1^{(k,0)}(\omega)$, 得

$$L(t: t\in[0, \beta_1^{(k,0)}(\omega)),\ x_n(t,\omega)\neq x_m(t,\omega))\leqslant L_l(\omega)+T_{L_l}(\omega). \tag{6.21}$$

令 $\Omega_0=(L_l(\omega)+T_{L_l}(\omega)\downarrow 0)(l\to\infty)$, 由引理 6.5、6.6 得 $P(\Omega_0)=1$. 固定 $\omega\in\Omega_0$. 由(6.21)知 $x_n(t,\omega)(=x_n(t))$在$[0, \beta_1^{(k,0)})$中依测度 L 收敛, 故存在一列 $n_j\to\infty$, 使 $x_{n_j}(t)$在$[0, \beta_1^{(k,0)})$中对几乎一切 t 收敛. 固定一收敛点 t_0. 由于 Doob 过程的相空间为 E, 故存在 $M\in E$, 使 $x_{n_i}(t_0)\to M(i\to\infty)$. 由于 E 离散, 有正整数 N, 使

$$x_{n_i}(t_0)=M \quad (i\geqslant N). \tag{6.22}$$

今证存在正整数 N', 使 $n>N'$时, $x_n(t_0)=M$, 从而$\{x_n(t_0)\}$收敛. 因为, 否则必存在一列 $m_i\to\infty$, 使

$$x_{m_i}(t_0)\neq M.$$

由此式及(6.22), 并根据 $g_{nm}(x_n(t,\omega))=x_m(t,\omega)$, 即知在$[0, t_0]$中, $x_M(t,\omega)$有无穷多个不同的 M 区间, 此与证明开始时所说的矛盾.

于是得证在$[0, \beta_1^{(k,0)}(\omega))$中, 定理结论成立; 令 $k\to\infty$即得在$[0, \beta_1^{(0)}(\omega))$中也成立; 同样得证在$[0, \beta_i^{(0)}(\omega))$中成立; 再由(6.20)即得证定理. ∎

今考虑一般情况. 取(3.14)的任一非负解 $V^{(n)}=(v_0^{(n)},\cdots,v_n^{(n)})$, $n\geqslant1$. 下面看到, 在证$(Q, V^{(n)})$过程列的收敛时, $(Q,\pi^{(n)})$过程列将在一定意义下起控制作用.

定理 6.2 以概率 1, $(Q,V^{(n)})$过程的样本函数 $x_n(t,\omega)$当 $n\to\infty$时对几乎一切 t 收敛.

证 如能证引理 6.5 及 6.6 对$(Q, V^{(n)})$过程也成立, 则只需逐字重复定理 6.1 的证明即可.

像对$(Q,\pi^{(n)})$过程列定义 $L_{nm}^{(i)}(\omega)$, $T_\varepsilon^{(n,r)}(\omega)$等一样, 对$(Q, V^{(n)})$过程列定义 $\bar{L}_{nm}^{(i)}(\omega)$, $\bar{T}_\varepsilon^{(n,r)}(\omega)$等, 只于其上加一短横线以表示区别.

与推导(6.18)同样, 得

$$E\Big(\sum_{i=1}^{\infty}\overline{L}_{nm}^{(i)}\Big)=E(\overline{\beta}_1^{(n,m)}-\overline{\tau}_1^{(n,m)})\cdot\sum_i P(\overline{\beta}_i^{(n,m)}<\overline{\beta}_1^{(n,0)}),$$

(6.23)

然而

$$P(\overline{\beta}_i^{(n,m)}<\overline{\beta}_1^{(n,0)})=\sum_{\substack{d_j=1\\(j=1,\cdots,i-1)}}^{m}P(\overline{\beta}_i^{(n,m)}<\overline{\beta}_1^{(n,0)}\mid x_n(\overline{\beta}_j^{(n,m)})$$

$$=d_j,j=1,\cdots,i-1)\cdot P(x_n(\overline{\beta}_j^{(n,m)})=d_j,j=1,\cdots,i-1)$$

$$=\sum_{\substack{d_j=1\\(j=1,\cdots,i-1)}}^{m}\bigcap_{j=1}^{i-1}(1-c_{d_j0})P(x_n(\overline{\beta}_j^{(n,m)})=d_j,\ j=1,\ \cdots,\ i-1)$$

$$\leqslant(1-c_{m0})^{i-1},$$

$$\sum_i P(\overline{\beta}_i^{(n,m)}<\overline{\beta}_j^{(n,0)})\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}(1-c_{m0})^{i-1}=\frac{z}{z-z_m}.\quad(6.24)$$

如果能够证明下列直觉上显然正确的事实:质点自(0, …, n)中的状态出发，每当到达∞时,就立即回到(0, …, n)，这样运动直到初次*到达(0, …, m)($m<n$)的平均时间，不大于它自 n 出发，每当到达∞时，立即回到 n，如是运动直到初次到达(0, …, m)的平均时间. 换言之，即

$$E(\overline{\beta}_1^{(n,m)}-\overline{\tau}_1^{(n,m)})\leqslant E(\beta_1^{(n,m)}-\tau_1^{(n,m)}),\qquad(6.25)$$

则由(6.23)—(6.25)立得

$$E\Big(\sum_{i=1}^{\infty}\overline{L}_{nm}^{(i)}\Big)\leqslant E(\beta_1^{(n,m)}-\tau_1^{(n,m)})\frac{z}{z-z_m},\qquad(6.26)$$

从而(6.18′)对(Q, $V^{(n)}$)过程正确，故引理 6.6 对(Q, $V^{(n)}$)过程也正确.

为严格证明上列事实，用联结基本事件空间的技巧[4,第71页]**，可造 Ω，使在其上同时定义(Q, $\pi^{(n)}$)过程及一列独立随机变量($y_n(\omega)$),有相同的分布 $P(y_n(\omega)=i)=v_i^{(n)}(i=0,\ \cdots,\ n)$. 将($Q$, $\pi^{(n)}$)过程的样本函数自第一个飞跃点起至初次出现状态 $y_1(\omega)$的

* 如自 (0, …, m) 出发，则认为初次回到(0, …, m)的时间为 0.

** 亦可参看第 11 篇中文献[4,第 7 页]——编者

时刻止的那一段抛去，再将自下一飞跃点(即出现 $y_1(\omega)$ 的时刻后的第一飞跃点)起至以后初次出现状态 $y_2(\omega)$ 的时刻* 止的那一段抛去，如此继续，经平移后所得即 $(Q, V^{(n)})$ 过程. 因而已将 $(Q, V^{(n)})$ 过程嵌入于 $(Q, \pi^{(n)})$ 过程之中. 对此二过程，易见对几乎一切 $\omega\in\Omega$，有

$$\overline{\beta}_1^{(n,m)}(\omega)-\overline{\tau}_1^{(n,m)}(\omega)\leqslant\beta_1^{(n,m)}(\omega)-\tau_1^{(n,m)}(\omega),$$

甚至更一般地有

$$\overline{T}_\varepsilon^{(n,m)}(\omega)\leqslant T_\varepsilon^{(n,m)}(\omega),$$

因而得证(6.25)，并且 $\overline{T}_\varepsilon^{(n,m)}(\omega)\leqslant T_\varepsilon^{(n,m)}(\omega)$；$\overline{T}_\varepsilon(\omega)\leqslant T_\varepsilon(\omega)$. 由于 $ET_\varepsilon\to 0(\varepsilon\to 0)$，$P(\lim\limits_{\varepsilon\to 0}T_\varepsilon=0)=1$，即知引理 6.5 对 $(Q, V^{(n)})$ 过程成立.

以 $x(t, \omega)$ 表示 $(Q, V^{(n)})$ 过程列的极限. 由定理 6.2，对几乎一切 ω，存在 L(Lebesgue)0 测集 T_ω，当 $t\in T_\omega$ 时，$x(t, \omega)$ 无定义. 补定义

$$x(t, \omega)=\infty, \ t\in T_\omega, \tag{6.27}$$

从而以概率 1，$x(t, \omega)$ 在 $t\in[0, \infty)$ 有定义. 由于 $(Q, V^{(n)})$ 过程 $X_n=\{x_n(t), t\geqslant 0\}$ 为 Borel 可测，故对 $i\in E$，$((t, \omega): x(t, \omega)=i)\in\overline{\mathscr{B}\times\mathscr{F}}$，这里 $\mathscr{B}$ 表示 $[0, \infty)$ 中 Borel 集族，而 $\overline{\mathscr{B}\times\mathscr{F}}$ 则表示 $\mathscr{B}\times\mathscr{F}$ 关于 $L\times P$ 的完全化 σ 代数. 因此

$$((t, \omega): x(t, \omega)=\infty)\in\overline{\mathscr{B}\times\mathscr{F}}.$$

由定理 6.2，$L(t: x(t, \omega)=\infty)=0$ 对几乎一切 ω 成立，故由 Fubini 定理，存在 L 测度为 0 的集 T，使 $t\overline{\in}T$ 时，

$$P(\omega: x(t, \omega)=\infty)=0. \tag{6.28}$$

试证(6.28)对一切 $t\in[0, \infty)$ 成立.

实际上，由(6.3)可见对 $\omega\in\Omega$ 及一切 n

$$x(t, \omega)=x_n(t, \omega), \ t<\tau(\omega), \tag{6.29}$$

这里 $\tau(\omega)=\tau_1^{(n)}(\omega)$ 是第一个飞跃点. 由此易见

$$P(x(t)=i\,|\,x(0)=i)\geqslant e^{-(a_i+b_i)t}\to 1 \quad (t\to 0), \tag{6.30}$$

---

* 易见这些时刻以概率 1 有穷.

而且对任意给定的 $t>0$，$\eta>0$，存在 $\delta>0$，使 $\epsilon<\delta$ 时，下二式成立：

$$|P(x(t)\neq\infty|x(0)=i,\ x(\epsilon)=i)$$
$$-P(x(t)\neq\infty|x(\epsilon)=i)|<\eta, \quad (6.31)$$
$$|P(x(t)\neq\infty|x(\epsilon)=i)$$
$$-P(x(t-\epsilon)\neq\infty|x(0)=i)|<\eta, \quad (6.32)$$

只要用到的条件概率有意义. 对 $t\in T$，有

$$P(x(t)=j|x(0)=i)\geqslant P(x(t)=j|x(0)=i,x(\epsilon)=i)$$
$$\cdot P(x(\epsilon)=i|x(0)=i), \quad (6.33)$$
$$P(x(t)\neq\infty|x(0)=i)=\sum_j P(x(t)=j|x(0)=i)$$
$$\geqslant P(x(\epsilon)=i|x(0)=i)P(x(t)\neq\infty|x(0)$$
$$=i,\ x(\epsilon)=i). \quad (6.34)$$

今因 $L(T)=0$，$0\overline{\in}T$，故对 $\eta>0$，存在 ϵ_1，使 $t-\epsilon_1\overline{\in}T$，同时使(6.31)、(6.32)对 ϵ_1 成立，而且 $P(x(\epsilon_1)=i|x(0)=i)>1-\eta$. 于是由(6.34)立得 $P(x(t)\neq\infty|x(0)=i)>(1-\eta)(1-2\eta)$. 由 η 的任意性，$P(x(t)\neq\infty|x(0)=i)=1$，或 $P(x(t)=\infty)=0$. ∎

定理 6.3 (i) $X=\{x(t),\ t\geqslant0\}$是 Q 过程；(ii) 以 $P_{ij}^{(n)}(t)$及 $P_{ij}(t)$分别表$(Q,\ V^{(n)})$过程 X_n 以及 X 的转移概率，则$\lim\limits_{n\to\infty}P_{ij}^{(n)}(t)=P_{ij}(t)$.

证 如能证 $X=\{x(t),\ t\geqslant0\}$是齐次马氏过程，则由(6.29)及(2.10)、(2.11)立知它是 Q 过程. 显然它的相空间是 $\overline{E}$. 由上述$P(x(t,\omega)=\infty)=0$ 及定理 6.2，对任一组 $0\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_k$，随机向量$(x_n(t_1),\ x_n(t_2),\ \cdots,\ x_n(t_k))$当 $n\to\infty$时以概率 1 收敛于$(x(t_1),x(t_2),\ \cdots,x(t_k))$，故也依分布收敛，即

$$\lim_{n\to\infty}P(x_n(t_1)=i_1,\ \cdots,\ x_n(t_k)=i_k)$$
$$=P(x(t_1)=i_1,\ \cdots,\ x(t_k)=i_k), \quad (6.35)$$

由此式并利用 $X_n=\{x_n(t),\ t\geqslant0\}$ 是齐次马氏过程，即知 $X=\{x(t),t\geqslant0\}$也是齐次马氏过程，而且$\lim\limits_{n\to\infty}P_{ij}^{(n)}(t)=P_{ij}(t)$. ∎

过程 $X=\{x(t),\ t\geqslant0\}$自然地称为$(Q,\ V)$过程，其中 $V=$

(v_n)是满足(6.1)的任一序列. 回忆(5.6), 有

定理 6.4 (Q, V)过程 $X=\{x(t), t\geqslant 0\}$是满足

$$P(x(\beta_1^{(n)})=n)=v_n \quad (n\geqslant 0) \tag{6.36}$$

的唯一 Q 过程.

证 先证(Q, V)过程满足(6.36). 设$(v_0^{(n)}, v_1^{(n)}, \cdots, v_n^{(n)})$ $(n\geqslant 1)$是(3.14)的任一非负解, 利用 $c_{l+1,l}\cdot c_{l,l-1}=c_{l+1,l-1}$, 用归纳法易见

$$v_i^{(n)}=\frac{v_i^{(n+k)}}{\sum_{j=0}^{n+k} v_j^{(n+k)} c_{jn}}, \quad v_n^{(n)}=\frac{\sum_{j=n}^{n-k} v_j^{(n+k)} c_{jn}}{\sum_{j=0}^{n+k} v_j^{(n+k)} c_{jn}}, \tag{6.37}$$

$k, n=1, 2, \cdots, i=0, 1, \cdots, n-1$. 今考虑$(Q, V^{(k)})$过程 $X_k=\{x_k(t), t\geqslant 0\}$, 对此过程用(6.5)定义 $\beta_1^{(k,n)}$. 由(6.3)$\beta_1^{(k,n)}\leqslant\beta_1^{(k+1,n)}$, $(k>n)$. 容易看出, 以概率 1 有

$$\lim_{k\to\infty}\beta_1^{(k,n)}=\beta_1^{(n)};$$

$$\lim_{k\to\infty}x_k(\beta_1^{(k,n)})=x(\beta_1^{(n)}).$$

根据(6.37)得

$$\begin{aligned}
P(x(\beta_1^{(n)})=n) &= \lim_{k\to\infty}P(x_k(\beta_1^{(k,n)})=n) \\
&= \lim_{k\to\infty}P(x_{n+k}(\beta_1^{(n+k,n)})=n) \\
&= \lim_{k\to\infty}\frac{\sum_{j=n}^{n+k} v_j^{(n+k)} c_{jn}}{\sum_{j=0}^{n+k} v_j^{(n+k)} c_{jn}} \\
&= v_n^{(n)}=v_n. \quad (n\geqslant 0).
\end{aligned}$$

次证如 $\widetilde{X}=\{\widetilde{x}(t), t\geqslant 0\}$为某满足(6.36)的可分、Borel 可测的 Q 过程, 则它与(Q, V)过程有相同的转移概率. 实际上, 利用(5.5)—(5.8)对 $\widetilde{X}$ 定义$(\tau_m, \beta_m^{(n)})$, $m\geqslant 1$, 并对它进行 $C(\tau_m, \beta_m^{(n)})$变换, 由定理 5.2, 所得过程 X_n 是$(Q,V^{(n)})$过程. 由(6.36), $v_n^{(n)}=v_n$. 根据定理 6.3, 它们的转移概率 $P_{ij}^{(n)}(t)$收敛于(Q, V)过程的转移函数 $P_{ij}(t)$.

另方面，可证对任意固定的 $t\geqslant 0$，$P(\lim\limits_{n\to\infty}x_n(t)=\widetilde{x}(t))=1$，从而 $P_{ij}^{(n)}(t)\to\widetilde{P}_{ij}(t)$，($\widetilde{P}_{ij}(t)$是 $\widetilde{X}$ 的转移函数)，于是 $\widetilde{P}_{ij}(t)=P_{ij}(t)$. 为证此，令

$$S_{\infty}^{(b)}(\omega)=(t:t\in[0,b],\ t\text{ 是 }\widetilde{x}(t,\omega)\text{的飞跃点}),$$

$$S_i^{(b)}(\omega)=(t:t\in[0,b],\ x(t,\omega)=i),$$

则由定理 4.1 及[1，第 160 页系]以概率 1，$S_{\infty}^{(b)}(\omega)$ 是 L 测度为 0 的闭集，既然$[0,b]=S_{\infty}^{(b)}(\omega)\cup\bigcup\limits_{i\neq\infty}S_i^{(b)}(\omega)$，故以概率 1，

$$\sum_{i\neq\infty}L(S_i^{(b)}(\omega))=b. \tag{6.38}$$

根据 $x_n(t,\omega)$的定义，在$[0,b]$中，它至少包含 $\widetilde{x}(t,\omega)$的对应于 $S_i^{(b)}(\omega)$，$i\leqslant n$ 的段. 由于

$$x_n(t,\omega)=\widetilde{x}(t+\tau_t^{(n)},\omega),\ t\in[0,b]. \tag{6.39}$$

这里 $\tau_t^{(n)}(\omega)$是自 $\widetilde{x}(t,\omega)$变到 $x_n(t,\omega)$时，自$[0,b]$中所抛去的部分段的总长，故

$$\tau_t^{(n)}(\omega)\leqslant\sum_{\substack{i\geqslant n+1\\ i\neq\infty}}L(S_i^{(b)}(\omega)),\quad t\in[0,b].$$

由(6.38)得 $\lim\limits_{n\to\infty}\tau_t^{(n)}(\omega)\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{\substack{i\geqslant n+1\\ i\neq\infty}}L(S_i^{(b)}(\omega))=0$. 由此及(6.39)得知，$P(\lim\limits_{n\to\infty}x_n(t,\omega)=\widetilde{x}(t,\omega))=1$ 对任一固定点 $t\in[0,b]$成立，因为 t 以概率 1 是 $\widetilde{x}(s,\omega)$，$s\geqslant 0$ 的连续点. 由 $b>0$ 的任意性即得所欲证. ∎

总结以上主要结果，得

基本定理 1 (i)设已给可分、Borel 可测 Q 过程 $X=\{x(t),t\geqslant 0\}$，使 $R<\infty$，$S<\infty$，则序列(v_n)

$$v_n=P(x(\beta_1^{(n)})=n),\ n\geqslant 1 \tag{6.40}$$

满足关系(6.1).

(ii)反之，设已给 Q 使 $R<\infty$，$S<\infty$，则对满足(6.1)的序列(v_n)，存在唯一的 Q 过程 $X=\{x(t),t\geqslant 0\}$，使(6.40)成立. 它的转移概率 $P_{ij}(t)=\lim\limits_{n\to\infty}P_{ij}^{(n)}(t)$，这里 $P_{ij}^{(n)}(t)$是$(Q,V^{(n)})$过程的转移概率，而 $V^{(n)}=(v_0^{(n)},v_1^{(n)},\cdots,v_n^{(n)})$是(3.14)在条件 $v_n^{(n)}=v_n$

下的解，$n\geqslant 1$.

实际上，由引理 6.1 得(i)，(ii)则自定理 6.3 及 6.4 推出.

2.7 方程组的非负解与结果的深化

上节 2.6 中结果的深化有待于对方程组(3.14)的非负解的研究，本节中首先求出(3.14)的全部非负解，然后应用此结果来进一步刻画全体 Q 过程. 以下恒设 $R<\infty$. 令

$$R_n=\sum_{i=0}^{n-1}v_i^{(n)}c_{i0},\quad S_n=v_n^{(n)}c_{n0},\quad \Delta_n=R_n+S_n.$$

引理 7.1 设 $V^{(n)}=(v_0^{(n)},\cdots,v_n^{(n)})(n\geqslant 1)$是(3.14)的非负解，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{R_n}{\Delta_n}=p\ (\geqslant 0)$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{\Delta_n}=q\ (\geqslant 0)$；$p+q=1$；当且只当 $v_n^{(n)}=1\ (n\geqslant 1)$时，$q=1$，$p=0$.

证 改写(3.14)为

$$\begin{aligned}
v_j^{(n+1)}&=v_j^{(n)}\left(1-v_{n+1}^{(n+1)}\frac{z_{n+1}-z_n}{z-z_n}\right)(j=0,1,\cdots,n-1),\\
v_n^{(n+1)}&=v_n^{(n)}\left(1-v_{n+1}^{(n+1)}\frac{z_{n+1}-z_n}{z-z_n}\right)-v_{n+1}^{(n+1)}\frac{z-z_{n+1}}{z-z_n},\qquad(7.1)\\
&\sum_{i=0}^{n}v_i^{(n)}=\sum_{i=0}^{n+1}v_i^{(n+1)}=1,
\end{aligned}$$

并令 $\delta_{n+1}=\sum\limits_{i=0}^{n}v_i^{(n+1)}+v_{n+1}^{(n+1)}c_{n+1,n}=1-v_{n+1}^{(n+1)}\dfrac{z_{n+1}-z_n}{z-z_n}>0$. 由(3.14)及(6.37)经简单计算后得

$$\frac{R_{n+1}}{\Delta_{n+1}}=\frac{R_n}{\Delta_n}+\frac{v_n^{(n+1)}c_{n0}}{\Delta_n\delta_{n+1}},$$

故$\dfrac{R_n}{\Delta_n}\uparrow p$，$0\leqslant p\leqslant 1$. 由$\dfrac{R_n}{\Delta_n}+\dfrac{S_n}{\Delta_n}=1$，得$\dfrac{S_n}{\Delta_n}\downarrow q$，$0\leqslant q\leqslant 1$，$p+q=1$.

如 $v_n^{(n)}=1\ (n\geqslant 1)$，则 $R_n=0$，$q=1$. 反之，如 $q=1$，则$\dfrac{S_n}{\Delta_n}=1$

$(n\geqslant 1)$, $R_n=0$. 因 $c_{i0}>0$, 故 $v_i^{(n)}=0$ $(i<n)$, 从而 $v_n^{(n)}=1$ $(n\geqslant 1)$. ∎

引理 7.2 设 $V^{(n)}$, $n\geqslant 1$ 为(3.14)的非负解, 如存在 k 使 $v_i^{(i)}=1, i\leqslant k$, 但 $v_{k+1}^{(k+1)}<1$, 则(i) $v_k^{(n)}>0$ $(n\geqslant k)$; (ii) $v_j^{(n)}/v_k^{(n)}$ 不依赖于 $n(>\max(j,k))$; (iii)任取一数 $r_k>0$, 并令 $r_j=\frac{v_j^{(n)}}{v_k^{(n)}}r_k$, $(n>\max(j,k))$, 则

$$0<\sum_{m=0}^{\infty}r_m c_{m0}<\infty. \tag{7.2}$$

证 因 $(v_0^{(i)},\cdots,v_{i-1}^{(i)},v_i^{(i)})=(0,\cdots,0,1)(i\leqslant k)$, 由(7.1)得

$$v_j^{(n)}=0,\ 一切\ n>j \quad (j=0,1,\cdots,k-1). \tag{7.3}$$

特别, $v_j^{(k+1)}=0$, $j\leqslant k-1$. 由假定 $v_{k+1}^{(k+1)}<1$, $\sum_{j=0}^{k+1}v_j^{(k+1)}=1$, 故 $v_k^{(k+1)}>0$, 由(7.1)得证(i). 任取 $n>m>\max(j,k)$, 由(6.37)得

$\frac{v_j^{(m)}}{v_k^{(m)}}=\frac{v_j^{(n)}\Big/\sum_{l=0}^{n}v_l^{(n)}c_{lm}}{v_k^{(n)}\Big/\sum_{l=0}^{n}v_l^{(n)}c_{lm}}=\frac{v_j^{(n)}}{v_k^{(n)}}$, 此即(ii). 因 $r_k>0$ 而一切 $r_m\geqslant 0$, 故得(7.2)中前一不等式. 取 $n>k$, 由(7.3) $v_1^{(n+1)}=\cdots=v_{k-1}^{(n+1)}=0$. 由 p 的定义及(ii)与(6.37)得

$$p=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{l=k}^{n}v_l^{(n+1)}c_{l0}}{v_k^{(n+1)}}\cdot\frac{v_k^{(n+1)}}{v_k^{(n+1)}c_{k0}+\left(\sum_{l=k+1}^{n+1}v_l^{(n+1)}c_{l,k+1}\right)c_{k+1,0}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r_k}\left(\sum_{l=k}^{n}r_l c_{l0}\right)\frac{v_k^{(k+1)}}{v_k^{(k+1)}c_{k0}+v_{k+1}^{(k+1)}c_{k+1,0}},$$

因由(7.3), $r_l=0$, $l<k$, 故得

$$\sum_{l=0}^{\infty}r_l c_{l0}=\frac{pr_k(v_k^{(k+1)}c_{k0}+v_{k+1}^{(k+1)}c_{k+1,0})}{v_k^{(k+1)}}<\infty. \qquad ∎$$

注 7.1 p, q 被解 $V^{(n)}=(v_j^{(n)},0\leqslant j\leqslant n)$唯一决定, (r_j)则除

一常数因子外被解 $V^{(n)}=(v_j^{(n)},0\leqslant j\leqslant n)$唯一决定. 而分布列$(V^{(n)},\ n\geqslant 1)$被数列$(v^{(n)}\equiv v_n^{(n)},\ n\geqslant 1)$唯一决定.

定理 7.1* 为使$(v_0^{(n)},\ \cdots,\ v_n^{(n)})(n\geqslant 1)$是(3.14)的一非负解，充要条件是存在非负数 p, q, r_n, $n\geqslant 0$, 满足关系式

$$p+q=1, \tag{7.4}$$

$$0<\sum_{n=0}^{\infty} r_n c_{n0}<\infty,\ \text{如}\ p>0, \tag{7.5}$$

$$r_n=0\quad (n\geqslant 0),\ \text{如}\ p=0, \tag{7.6}$$

解$(v_0^{(n)},\ \cdots,\ v_n^{(n)})$可表示为

$$v_j^{(n)}=X_n\frac{r_j}{A_n}\quad (j=0,\ \cdots,\ n-1), \tag{7.7}$$

$$v_n^{(n)}=Y_n+X_n\frac{\sum_{l=n}^{\infty} r_l c_{ln}}{A_n}, \tag{7.8}$$

其中** $0\leqslant A_n=\sum_{l=0}^{\infty} r_l c_{ln}<\infty$, 而

$$X_n=\frac{pA_n(z-z_n)}{pA_n(z-z_n)+qA_0 z},$$

$$Y_n=\frac{qA_0 z}{pA_n(z-z_n)+qA_0 z}. \tag{7.9}$$

此时 p, q 被唯一决定，而 r_n, $n\geqslant 0$ 则除一常数因子外被唯一决定.

证　充分性　设已给满足(7.4)～(7.6)的 p, q, r_n. 如 $p=0$, 则由(7.7)、(7.8)得$(v_0^{(n)},\ \cdots,\ v_{n-1}^{(n)},\ v_n^{(n)})=(0,\ \cdots,\ 0,\ 1)$, $n\geqslant 1$, 它显然是(3.14)的一非负解. 如 $p>0$, 由(7.5)及

$$A_n-A_{n+1}c_{n+1,n}=\left(\sum_{i=0}^{n} r_i\right)(1-c_{n+1,n}), \tag{7.10}$$

$$A_n\geqslant A_0, \tag{7.11}$$

---

* 如理解 q 为到达∞后，自∞“连续地”回到有穷状态的概率，p 为自有穷状态跳出的概率，则不难理解本定理的概率意义.

** 认为$\frac{0}{0}=0$.

可见 $0<A_n<\infty$，$0<X_n<\infty$. 由(7.7)、(7.8)及(2.16)，有

$$\sum_{i=0}^{n+1} v_i^{(n+1)} c_{in} = \frac{X_{n+1}}{A_{n+1}} A_n + Y_{n+1} c_{n+1,n}, \tag{7.12}$$

由(7.9)得 $\frac{Y_{n+1}}{X_{n+1}} \cdot \frac{z-z_{n+1}}{z-z_n} A_{n+1} = A_n \frac{Y_n}{X_n}$，利用 $X_n+Y_n=1$ 及(2.16)有 $\frac{X_n}{A_n} = \frac{X_{n+1}}{A_{n+1}} \div \left(\frac{X_{n+1}}{A_{n+1}} A_n + Y_{n+1} c_{n+1,n} \right)$. 以(7.12)代入得 $\frac{X_n}{A_n} = \frac{X_{n+1}}{A_{n+1}} \Big/ \sum_{i=0}^{n+1} v_i^{(n-1)} c_{in}$. 乘此式两方以 $r_j (j=0, 1, \cdots, n-1)$，并利用(7.7)、(7.8)得

$$v_j^{(n)} = v_j^{(n+1)} \Big/ \sum_{i=0}^{n+1} v_i^{(n-1)} c_{in} \quad (j=0, 1, \cdots, n-1). \tag{7.13}$$

由(7.7)、(7.8)有 $\sum_{j=0}^{n} v_j^{(n)} = \sum_{j=0}^{n+1} v_j^{(n+1)} = 1$. 按(7.13)及 $c_{jn}=1 (j\leqslant n)$，

$$v_n^{(n)} = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} v_j^{(n)} = \frac{v_n^{(n+1)} + v_{n+1}^{(n+1)} c_{n+1,n}}{\sum_{i=0}^{n+1} v_i^{(n+1)} c_{in}}, \tag{7.14}$$

因而充分性证完.

必要性 设已给(3.14)的一非负解($v_0^{(n)}, \cdots, v_{n-1}^{(n)}, v_n^{(n)}$). 取引理 7.1 中的 p，q，此时如 $p=0$，则取 $r_n=0 (n\geqslant 1)$ 而结论显然正确；否则由引理 7.1 必存在 $k(\geqslant 0)$ 使满足引理 7.2 的条件，于是如引理 7.2 定义 $r_n (n\geqslant 1)$. 由此二引理知(7.4)～(7.6)满足. 下证(7.7)、(7.8)成立. 为此定义

$$u_j^{(n)} = X_n \frac{r_j}{A_n} \quad (j=0, 1, \cdots, n-1);$$

$$u_n^{(n)} = Y_n + X_n \frac{\sum_{l=n}^{\infty} r_l c_{ln}}{A_n}, \tag{7.15}$$

其中 $A_n = \sum_{l=0}^{\infty} r_l c_{ln} > 0$，而 X_n，Y_n 由(7.9)给出. 由充分性之证知

$(u_0^{(n)}, \cdots, u_{n-1}^{(n)}, u_n^{(n)})(n \geqslant 1)$是(3.14)的非负解，故为了证$(v_0^{(n)}, \cdots, v_n^{(n)}) = (u_0^{(n)}, \cdots, u_n^{(n)})(n \geqslant 1)$，只要证

$$v_n^{(n)} = u_n^{(n)} \quad (n \geqslant 1). \tag{7.16}$$

注意，如$n \leqslant k$，则由(7.3)得$u_n^{(n)} = 1 = v_n^{(n)}$而此时(7.16)成立．故只要对$n \geqslant k+1$证明(7.16)．对$n$用归纳法，经过一些计算后，可证

$$u_k^{(n)} = v_k^{(n)} \quad (n \geqslant k+1), \tag{7.17}$$

由此式并注意$\dfrac{u_{k+i}^{(n)}}{u_k^{(n)}} = \dfrac{r_{k+i}}{r_k} = \dfrac{v_{k+i}^{(n)}}{v_k^{(n)}}$ $(k+i<n)$立得$\left(1 - \sum_{i=k}^{n-1} u_i^{(n)}\right) \Big/ u_k^{(n)} = \left(1 - \sum_{i=k}^{n-1} v_i^{(n)}\right) \Big/ v_k^{(n)}$，即$1 - \sum_{i=k}^{n-1} u_i^{(n)} = 1 - \sum_{i=k}^{n-1} v_i^{(n)}$．今因$\sum_{i=0}^{n} u_i^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} v_i^{(n)} = 1$而且$u_i^{(n)} = v_i^{(n)} = 0$对一切$i < k$成立，故得证$u_n^{(n)} = v_n^{(n)}$，$n \geqslant k+1$.

唯一性 今设有二组满足(7.4)～(7.6)的非负数$p, q, r_n, n \geqslant 0$，及$\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}_n, n \geqslant 0$，均使已给非负解$(v_0^{(n)}, \cdots, v_n^{(n)})$能表示成(7.7)～(7.9)的形式．如$v_n^{(n)} = 1 (n \geqslant 1)$，即$v_j^{(n)} = 0 (n \geqslant 1, j < n)$，则由(7.7)及$\dfrac{0}{0} = 0$的协定知$p = \bar{p} = 0$，$r_n = \bar{r}_n = 0$，$q = \bar{q} = 1$．如存在$k$使$v_i^{(i)} = 1$，$i \leqslant k$，$v_{k+1}^{(k+1)} < 1$，则由(7.7)、(7.9)、(7.5)知$p > 0$，$X_n > 0$，$A_0 > 0$．于是由(7.7)、(7.8)，

$$\frac{\sum_{k=0}^{n-1} v_k^{(n)} c_{k0}}{\sum_{k=0}^{n} v_k^{(n)} c_{k0}} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} r_k c_{k0}}{\sum_{k=0}^{\infty} r_k c_{k0} + \dfrac{Y_n}{X_n} A_n c_{n0}}$$

$$= \frac{\sum_{k=0}^{n-1} r_k c_{k0}}{A_0 + \dfrac{q}{p} A_0} \uparrow p, \ (n \to \infty).$$

同样，上式右方也应收敛于$\bar{p}$，故$p = \bar{p}$，由(7.4)得$q = \bar{q}$；其次，当$j < k$时，由于$v_j^{(k)}$等于0而由(7.7)得$r_j = 0 = \bar{r}_j$．既然$v_k^{(k+1)} > 0$，故$r_k > 0$，$\bar{r}_k > 0$，于是由(7.7)得知对$j > k$，有

$$r_j/r_k = v_j^{(n)}/v_k^{(n)} = \bar{r}_j/\bar{r}_k \quad (n > \max(j, k)).$$ ∎

考虑任一可分 Borel 可测 Q 过程 $X=\{x(t), t\geqslant 0\}$. 如前所述，由(6.40)定义的(v_n)决定(3.14)一非负解$(v_0^{(n)}, \cdots, v_n^{(n)})$, $n\geqslant 1$(更明确些，$v_j^{(n)}=P(x(\beta_1^{(n)})=j)$, $j=0, \cdots, n$, $n\geqslant 1$)，通过定理 7.1，它给出一列非负数 p, q, r_n, $n\geqslant 1$.

定义 7.1 称 p, q, r_n, $n\geqslant 1$ 为 Q 过程 $X=\{x(t), t\geqslant 0\}$的特征数列.

综合定理 7.1 与基本定理 1，立得

基本定理 2 (i)设已给可分 Borel 可测 Q 过程 $X=\{x(t), t\geqslant 0\}$，使 $R<\infty$, $S<\infty$，则它的特征数列满足条件(7.4)～(7.6)；(ii)反之，设已给一列非负数 p, q, r_n, $n\geqslant 1$，满足(7.4)～(7.6)，则存在唯一 Q 过程 $X=\{x(t), t\geqslant 0\}$，其特征数列重合于此已给数列，而且此过程的转移概率 $P_{ij}(t)=\lim\limits_{n\to\infty}P_{ij}^{(n)}(t)$，这里 $P_{ij}^{(n)}(t)$是$(Q, V^{(n)})$过程的转移概率，而 $V^{(n)}=(v_0^{(n)}, \cdots, v_n^{(n)})$由(7.7)～(7.9)决定.

今研究特征数列为 $p=0$, $q=1$, $r_n=0(n\geqslant 0)$的 Q 过程，记为$(Q, 1)$过程，它是 2.6 中$(Q, \pi^{(n)})$过程列 $X_n=\{x_n(t), t\geqslant 0\}$ $(n\geqslant 1)$的极限，$\pi^{(n)}=(0, \cdots, 0, 1)$. 其特殊性已见于 2.6，即它是"最难"收敛的过程列的极限. 换言之，由$(Q, \pi^{(n)})$过程列的收敛，可推出其他$(Q, V^{(n)})$过程列的收敛. 它的特殊性还在于下列

定理 7.2 $(Q, 1)$过程 $X=\{x(t), t\geqslant 0\}$是唯一的既满足向后方程组(1.8)又满足向前方程组(1.9)的 Q 过程.

证 因每个 Q 过程都满足(1.8)，故只要证它满足(1.9). 为此只要证在任一固定的 $t_0>0$ 前，样本函数以概率 1 有最后一断点*，而且是跳跃点[1,第227页]. 令 $\Omega_0=(x(t_0, \omega)\in E)$，则 $P(\Omega_0)=1$. 固定 $\omega\in\Omega_0$，设 $x(t_0, \omega)=k$. 由于 $x_n(t_0, \omega)\to x(t_0, \omega)$及 E 的离散性，存在 $N(=N(\omega))$，使 $n\geqslant N$ 时，$x_n(t_0, \omega)=k$. 取 $M>\max(N, k)$，由于在飞跃点 τ 上，$x_n(\tau, \omega)=n$，再注意(1.7)，可

---

* $t=0$ 也看作一跳跃点.

见在 t_0 以前，$x_M(t, \omega)$必有最后一断点，而且是跳跃点，这个点是某 k 区间的闭包的左端点．由于(6.3)，此 k 区间保留在一切 $x_n(t, \omega)$，$n \geqslant M$，之中，故也保留在 $x(t, \omega)$之中，从而得证 $x(t, \omega)$在 t_0 以前有最后一断点且为跳跃点，$(\omega \in \Omega_0)$，故$(Q, 1)$过程满足(1.8)与(1.9)．至于这种过程的唯一性则已在[11,定理 11]中证明． ∎

系 7.1 设 τ 为$(Q, 1)$过程的第一个飞跃点，则

$$P(\lim_{t \uparrow \tau} x(t) = \infty) = 1.$$

证 此由定理 7.2 及[1,第 227 页]推出． ∎

2.8 $S=\infty$时 Q 过程的构造

本节的主要任务是当 $R<\infty$，$S=\infty$时，求出一切 Q 过程，所用方法与 2.6 相同，故证明扼要．以下固定一如此的 Q．考虑某可分 Borel 可测 Q 过程 $X=\{x(t), t \geqslant 0\}$，以及(5.11)中的 $\alpha_1^{(n)}$．由定理 5.3，存在非负整数 l，当 $n \geqslant l$ 时，$P(\alpha_1^{(n)}<\infty)=1$．令 $\mathscr{S}_i^{(n)} = P(x(\alpha_1^{(n)})=i)$，则 $\sum_{i=0}^{n} \mathscr{S}_i^{(n)} = 1 \quad (n \geqslant l)$，故至少存在一个 $\mathscr{S}_k^{(n)}>0$．再由定理 5.3 及(3.8)，有

$$\mathscr{S}_j^{(n)} = \mathscr{S}_j^{(n+1)} \Big/ \sum_{i=0}^{n} \mathscr{S}_i^{(n+1)} \quad (j \leqslant n), \tag{8.1}$$

故 $\mathscr{S}_k^{(m)}>0 (m \geqslant k)$而且 $\mathscr{S}_j^{(m)}/\mathscr{S}_k^{(m)}$ 不依赖于 $m(\geqslant \max(j, k))$．今任意取定 $\mathscr{S}_k>0$ 而定义

$$\mathscr{S}_j = \mathscr{S}_k \frac{\mathscr{S}_j^{(m)}}{\mathscr{S}_k^{(m)}} \quad (\geqslant 0), \tag{8.2}$$

显然，除差一常数因子外，$(\mathscr{S}_j)$ $j \geqslant 0$ 被过程唯一决定．

定义 8.1 称$(\mathscr{S}_j)$，$j \geqslant 0$，为 Q 过程 $X=\{x(t), t \geqslant 0\}$的特征数列．

以 τ_1 表示此过程的第一个飞跃点，令

$$n_j = E_j\tau_1 = \sum_{i=j}^{\infty} m_i \tag{8.3}$$

(见(2.1)). 以后会证明

$$0 < \sum_{j=0}^{\infty} \mathscr{S}_j n_j < \infty. \tag{8.4}$$

现在考虑反面的问题:设已给满足(8.4)的非负数列$(\mathscr{S}_j)$, $j\geqslant 0$, 由(8.4)至少有一$\mathscr{S}_k>0$, 不失以下讨论的一般性, 设$\mathscr{S}_0>0$. 按(3.20)作分布$\mathscr{S}^{(n)}=(\mathscr{S}_0^{(n)}, \cdots, \mathscr{S}_n^{(n)})$. 由定理3.3, 存在$(\Omega, \mathscr{F}, P)$, 在其上定义$(Q, \mathscr{S}^{(n)})$过程列$X_n=\{x_n(t), t\geqslant 0\}(n\geqslant 0)$, 满足(3.7). 以$\tau_i^{(n)}$表示$X_n$的第$i$个飞跃点. 令$\beta_0^{(n)}=\min(\tau_i^{(n)}, x_n(\tau_i^{(n)})=0)$, 由于$\mathscr{S}_0>0$, $P(\beta_0^{(n)}<\infty)=1$. $\xi^{(n,k)}$为满足$\tau_i^{(n)}\leqslant\beta_0^{(n)}$及$x_n(\tau_i^{(n)})=k$的$i$的个数.

引理 8.1 $E\xi^{(n,k)}=\sum_{i=1}^{\infty}P(\tau_i^{(n)}\leqslant\beta_0^{(n)}, x_n(\tau_i^{(n)})=k)=\dfrac{\mathscr{S}_k^{(n)}}{\mathscr{S}_0^{(n)}}=\dfrac{\mathscr{S}_k}{\mathscr{S}_0}$.

证 令

$$\eta_i(\omega)=\begin{cases}1, \text{如 } \tau_i^{(n)}(\omega)\leqslant\beta_0^{(n)}(\omega), x_n(\tau_i^{(n)}(\omega))=k, \\ 0, \text{如 } \tau_i^{(n)}(\omega)>\beta_0^{(n)}(\omega), \text{或 } x_n(\tau_i^{(n)}(\omega))\neq k.\end{cases}$$

则
$$E\xi^{(n,k)} = \sum_{i=1}^{\infty}E\eta_i = \sum_{i=1}^{\infty}P(\tau_i^{(n)} \leqslant \beta_0^{(n)}, x_n(\tau_i^{(n)}) = k)$$
$$= \mathscr{S}_k^{(n)}\sum_{l=0}^{\infty}(1-\mathscr{S}_0^{(n)})^l = \frac{\mathscr{S}_k^{(n)}}{\mathscr{S}_0^{(n)}} = \frac{\mathscr{S}_k}{\mathscr{S}_0}. \quad \blacksquare$$

今定义

$$L_{nm}^{(i)}(\omega)=\begin{cases}\tau_{i+1}^{(n)}(\omega)-\tau_i^{(n)}(\omega), \text{如 } \tau_i^{(n)}(\omega)\leqslant\beta_0^{(n)}(\omega), n\geqslant x_n(\tau_i^{(n)})>m, \\ =0, \text{如 } \tau_i^{(n)}(\omega)>\beta_0^{(n)}(\omega), \text{或 } x_n(\tau_i^{(n)})\leqslant m.\end{cases} \tag{8.5}$$

因而$\sum_{i=1}^{\infty}L_{nm}^{(i)}(\omega)$是在变换(3.7)下在$[0, \beta_0^{(n)}(\omega))$中自$x_n(t,\omega)$变到$x_m(t,\omega)$时所抛去区间之总长, 记$\sum_{i=1}^{\infty}L_{nm}^{(i)}(\omega)\uparrow L_{\cdot m}(\omega)$.

引理 8.2 $\lim\limits_{m\to\infty} EL_m=0; P(\lim\limits_{m\to\infty} L_m=0)=1.$

证 由(8.4)，只要证

$$EL_m \leqslant \frac{1}{\mathscr{S}_0}\sum_{k=m+1}^{\infty}\mathscr{S}_k n_k.$$

令 $\qquad C=(x_n(\tau_i^{(n)})>m,\ \tau_i^{(n)}\leqslant\beta_0^{(n)}),\quad \Delta=\sum\limits_{j=m+1}^{n}\mathscr{S}_j^{(n)},$

由(8.3)及引理 8.1 得

$$E\Big(\sum_{i=1}^{\infty}L_{mn}^{(i)}\Big)=\sum_{i=1}^{\infty}E(\tau_{i+1}^{(n)}-\tau_i^{(n)}|C)\cdot P(C)$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}E(\tau_{i+1}^{(n)}-\tau_i^{(n)}|x_n(\tau_i^{(n)})>m)\cdot P(C)$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\Big[\sum_{k=m+1}^{n}E(\tau_{i+1}^{(n)}-\tau_i^{(n)})|x_n(\tau_i^{(n)})=k)$$
$$\cdot P(x_n(\tau_i^{(n)})=k|x(\tau_i^{(n)})>m)\Big]P(C)$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\Big[\sum_{k=m+1}^{n}n_k\frac{\mathscr{S}_k^{(n)}}{\Delta}\Big]P(C)$$

$$=\Big[\sum_{k=m+1}^{n}n_k\frac{\mathscr{S}_k^{(n)}}{\Delta}\Big]\sum_{l=m+1}^{n}\sum_{i=1}^{\infty}P(x_n(\tau_i^{(n)})=l,\ \tau_i^{(n)}\leqslant\beta_0^{(n)})$$

$$=\Big[\sum_{k=m+1}^{n}n_k\frac{\mathscr{S}_k^{(n)}}{\Delta}\Big]\frac{\Delta}{\mathscr{S}_0^{(n)}}=\frac{1}{\mathscr{S}_0}\sum_{k=m+1}^{n}n_k\mathscr{S}_k. \tag{8.6}$$ ∎

今令 $\tau_{ij}^{(n)}(\omega)$ 为 $\tau_i^{(n)}(\omega)$ 后第 j 个跳跃点，利用(6.16)，定义 $L_{n\varepsilon}^{(i)}(\omega)=\sum\limits_{j=0}^{\infty}f_\varepsilon(\tau_{ij+1}^{(n)}(\omega)-\tau_{ij}^{(n)}(\omega))$ 或 0，视 $\tau_i^{(n)}(\omega)\leqslant\beta_0^{(n)}(\omega)$ 与否而定，再令

$$T_\varepsilon^{(n)}(\omega)=\sum_{i=1}^{\infty}L_{n\varepsilon}^{(i)}(\omega)$$
$$=\sum_{\tau_1^{(n)}\leqslant\tau_{ij}^{(n)}<\beta_0^{(n)}}f_\varepsilon(\tau_{ij+1}^{(n)}(\omega)-\tau_{ij}^{(n)}(\omega)). \tag{8.7}$$

又 $T_\varepsilon^{(n)}(\omega)\uparrow T_\varepsilon(\omega)(n\to\infty)$.

如令

$$F_\varepsilon^{(i)}=\sum_{j=0}^{\infty}f_\varepsilon(\tau_{ij+1}^{(n)}-\tau_{ij}^{(n)}),$$

$$n_k^{(\epsilon)} = E_k F_\epsilon^{(l)} = \sum_{l=k}^{\infty}\left[\frac{1}{b_l}(1-e^{-q_l\epsilon}) + \sum_{k=0}^{l-1}\frac{a_l a_{l-1}\cdots a_{l-k}(1-e^{-q_{l-k-1}\epsilon})}{b_l b_{l-1}\cdots b_{l-k}b_{l-k-1}}\right]$$

(因而 $n_k^{(\infty)}=n_k$)，则与上面的证明同样得

$$ET_\epsilon^{(n)}(\omega) = \frac{1}{\mathscr{S}_0}\sum_{k=1}^{n} n_k^{(\epsilon)}\mathscr{S}_k \leqslant \frac{1}{\mathscr{S}_0}\sum_{k=1}^{n} n_k\mathscr{S}_k$$

(为此只要以 $F_\epsilon^{(i)}$ 换(8.6)中的 $\tau_{i+1}^{(n)}-\tau_i^{(n)}$). 故得证下面的引理.

引理 8.3 $\lim\limits_{\epsilon\to 0}ET_\epsilon=0$，$P(\lim\limits_{\epsilon\to 0}T_\epsilon=0)=1$.

定理 8.1 如 $0<\sum\limits_{i=0}^{\infty}\mathscr{S}_i n_i<\infty$，则以概率 1，$(Q, S^{(n)})$ 过程的样本函数 $x_n(t, \omega)$ 当 $n\to\infty$ 时对几乎一切 t 收敛.

证 只需利用引理 8.2 及 8.3，重复定理 6.1 的证即可. ∎

仿 2.6 补定义极限函数后，同样可证明所得为 Q 过程 $X=\{x(t), t\geqslant 0\}$，称为$(Q, \mathscr{S})$过程，其转移概率 $P_{ij}(t)=\lim\limits_{n\to\infty}P_{ij}^{(n)}(t)$，而$P_{ij}^{(n)}(t)$是$(Q, \mathscr{S}^{(n)})$过程的转移概率.

定理 8.2 $(Q, \mathscr{S})$过程 $X=\{x(t), t\geqslant 0\}$是唯一以已给的$(\mathscr{S}_j)$，$j\geqslant 0$，为特征数列的 Q 过程.

证 用(5.11)于$(Q, \mathscr{S})$过程及$(Q,\mathscr{S}^{(l)})$过程而得 $\alpha_1^{(n)}$ 及 $\alpha_1^{(l,n)}$，由(8.1)得

$$\begin{aligned}P(x(\alpha_1^{(n)}) = i) &= \lim_{l\to\infty}P(x_l(\alpha_1^{(l,n)}) = i)\\ &= \lim_{l\to\infty}P(x_{n+l}(\alpha_1^{(n+l,n)}) = i)\\ &= \lim_{l\to\infty}\mathscr{S}_i^{(n+l)}\Big/\sum_{j=0}^{n}\mathscr{S}_j^{(n+l)} = \mathscr{S}_i^{(n)}\\ &(i = 0, 1, \cdots, n).\end{aligned}$$

由此即知 X 的特征数列为$(\mathscr{S}_j)$.

唯一性的证仍仿定理 6.4，但要作下列改变：设 $\tilde{X}=\{\tilde{x}(t), t\geqslant 0\}$是以$(\mathscr{S}_j)$为特征数列的 Q 过程，它可分、Borel 可测. 对它用(5.10)～(5.13)定义 τ_m，$\alpha_m^{(n)}$，$m\geqslant 1$，并施行 $C(\tau_m, \alpha_m^{(n)})$变换而

得$(Q,\mathscr{S}^{(n)})$过程$X_n=\{x_n(t),t\geqslant\}0$. 由特征数列的定义$\mathscr{S}_i^{(n)}=$

$\mathscr{S}_i\Big/\sum_{j=0}^{n}\mathscr{S}_j$ $(i=0,1,\cdots,n)$. 故X_n的转移概率$P_{ij}^{(n)}(t)$如上述应收敛于$(Q,\mathscr{S})$过程的转移概率$P_{ij}(t)$.

今证$P_{ij}^{(n)}(t)$也收敛于$\widetilde{X}$的转移概率$\widetilde{P}_{ij}(t)$. 固定$(0,b)$而令

$$S_\infty^{(b)}(\omega)=(t:t\in(0,b),t\text{ 是 }\widetilde{x}(t,\omega)\text{的飞跃点}),$$

因以概率1,$S_\infty^{(b)}(\omega)$是闭集，故$(0,b)-S_\infty^{(b)}(\omega)$是可列多个不相交的开区间$T_j(\omega)=(\eta_j(\omega),\gamma_j(\omega))$的和，在每$T_j(\omega)$中，$\widetilde{x}(t,\omega)\neq\infty$. 定义$\widetilde{x}(\eta_j)=\lim\limits_{s\downarrow\eta_j}\widetilde{x}(s)$，试证

$$P(\widetilde{x}(\eta_j)=\infty)=0.$$

否则，如说$P(\widetilde{x}(\eta_j)=\infty)>0$，则必存在$k\in E$，使

$$P(\widetilde{x}(\eta_j))=\infty;\text{对某 }t\in(\eta_j,\gamma_j),\ \widetilde{x}(t)=k)>0,$$

于是，由上式得$P(\xi_k<\infty)>0$(这里$\xi_k(\omega)$由(4.5)对$\widetilde{x}(t,\omega)$定义)，此与(4.7)矛盾. 今令t-集

$$S_i^{(b)}(\omega)=(\text{使 }\widetilde{x}(\eta_j)=i\text{ 的区间}(\eta_j(\omega),\gamma_j(\omega))\text{之和}),$$

由(8.8)得$\bigcup\limits_{i\neq\infty}S_i^{(b)}(\omega)=\bigcup\limits_{j}(\eta_j(\omega),\gamma_j(\omega))=(0,b)-S_\infty^{(b)}(\omega)$. 既然以概率1，$L(S_\infty^{(b)}(\omega))=0$，故$\sum\limits_{i\neq\infty}L(S_i^{(b)}(\omega))=b$的概率为1. 然后自(6.38)起逐句重复定理6.4的证并注意$x(0,\omega)=x_n(0,\omega)$即可. ∎

基本定理3 (i)设已给可分、Borel可测Q过程$X=\{x(t),t\geqslant0\}$，使$R<\infty$，$S=\infty$，则它的特征数列$(\mathscr{S}_j)$满足条件(8.4)；(ii)反之，设已给一列非负数$(\mathscr{S}_j)$，满足(8.4)，则存在唯一Q过程$X=\{x(t),t\geqslant0\}$，其特征数列重合于此已给数列，而且此过程的转移概率$P_{ij}(t)=\lim\limits_{n\to\infty}P_{ij}^{(n)}(t)$，这里$P_{ij}^{(n)}(t)$是$(Q,\mathscr{S}^{(n)})$过程的转移概率，而$\mathscr{S}^{(n)}=(\mathscr{S}_0^{(n)},\cdots,\mathscr{S}_n^{(n)})$由(3.20)决定.

证 结论(ii)由定理8.2及其上一段论述推出. 今证(i). 由定理5.3，存在$l\geqslant0$，当$n\geqslant l$时，$P(a_1^{(n)}<\infty)=1$. 因$\sum\limits_{k=0}^{n}\mathscr{S}_k^{(n)}=$

$\sum_{k=0}^{n} P(x(\alpha_1^{(n)})=k)=1$，故至少有一 $\mathscr{S}_k^{(n)}>0$. 不失以下讨论的一般性，可设 $\mathscr{S}_0^{(n)}>0$. 定义

$$\alpha(\omega)=\inf(u: u \text{ 是 } x(t,\omega) \text{的飞跃点}; x(u,\omega)=0), \tag{8.9}$$

则 $P(\alpha<\infty)\geqslant\mathscr{S}_0^{(n)}>0$. 故存在 $T>0$, $\beta>0$ 使 $P_0(\alpha<T)=\beta>0$. 由引理 4.1 即得

$$E\alpha<\infty. \tag{8.10}$$

今由 X 作$(Q,\mathscr{S}^{(n)})$过程 X_n(参看定理 5.3)，令

$$\beta_0^{(n)}(\omega)=\inf(u: u \text{ 是 } x_n(t,\omega) \text{的飞跃点}; x_n(u,\omega)=0).$$

显然 $\beta_0^{(n)}(\omega)\leqslant\alpha(\omega)$，故由(8.6)得

$$E\alpha \geqslant E\beta_0^{(n)} = E\Big(\tau_1^{(n)} + \sum_{i=1}^{\infty} L_{n0}^{(i)}\Big)$$

$$= E\tau_1^{(n)} + \frac{1}{\mathscr{S}_0}\sum_{k=1}^{n} n_k\mathscr{S}_k.$$

注意 (8.10)，即得 $0<n_0\mathscr{S}_0\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}n_k\mathscr{S}_k<\infty$. ∎

2.9 进一步的问题

1) 研究一般的满足(1.6)的 Q 过程的构造. 首先值得注意的是所谓双边生灭过程，此时相空间 $E=(0, \pm1, \pm2,\cdots)$，(1.7)仍成立，但其中 i 可为一切整数. 增添 $+\infty$与$-\infty$于 E 中而使之紧化，对已给的 Q, Q 可能是正则的. 否则，质点可能以正的概率，在有穷时间内到达$+\infty$，也可能自$+\infty$连续流入；对$-\infty$也如此. 因而情况比较复杂. 双边生灭过程，对一般 Q 过程的构造问题的研究，是有很大帮助的. 当相空间为(a, b)时，对扩散过程，类似的问题近年来由 Feller 研究解决.

2) 本篇中研究的生灭过程以 0 为反射壁，类似地可研究以 0

为吸引壁，或以概率 u 为反射、以概率 v 为吸引的情形（$u+v=1$）.

3）为了叙述 2.1 中所说的第三种方法的逻辑基础，我们用两种不同的 Doob 过程的变换来分别处理 $S<\infty$ 与 $S=\infty$ 的情形. 自然地提出下列问题：能否用处理 $S<\infty$ 时所用的变换（即变换（6.3）），来研究 $S=\infty$ 的情形？看来也许是可能的. *

4）我们证明了：任一 Q 过程的转移函数 $P_{ij}(t)$ 可用某一列 Doob 过程列的转移函数 $P_{ij}^{(n)}(t)$ 所逼近. 事实上证明了更强的收敛性成立（见定理 6.2）. 由于 Doob 过程的结构较简单，因此，为了研究 Q 过程的某一性质，自然想到先对 Doob 过程研究此性质，然后过渡到极限. 这方面的工作还待深入考虑.

2.10 总结与补充

1）我们对本篇作一总结.

设 $X=\{x(t), t\geqslant 0\}$ 是一个典范链生灭过程，具有转移概率 $(P_{ij}(t))$ 和密度矩阵 Q

$$Q=\begin{pmatrix} -b_0 & b_0 & & & & \\ a_1 & -(a_1+b_1) & b_1 & & 0 & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & & a_n & -(a_n+b_n) & b_n & \\ & 0 & & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \quad (10.1)$$

其中 $a_i>0(i>0)$；$b_i>0(i\geqslant 0)$，简称为 Q 过程. 当 $R=\infty$ 时只有唯一的一个 Q 过程，但如果 $R<\infty$，存在无穷多个 Q 过程，这里

---

* 此问题今已解决，见 2.10 节或本书第 7 篇 7.3 节. 本节 1)、2)两段是 1996 年新增写的. 读者只需阅读前段即知本篇的最后结果. 后段则是本篇原始论文发表后的改进结果. 还可见本书 2.10 节中列出的 4 部专著，第 3、4 部专著中还允许生灭过程中断. ——编者

$$R = \sum_{i=0}^{\infty} m_i, \tag{10.2}$$

$$m_i = \frac{1}{b_i} + \sum_{k=0}^{i-1} \frac{a_i a_{i-1} \cdots a_{i-k}}{b_i b_{i-1} \cdots b_{i-k} b_{i-k-1}}, (i \geqslant 0) \tag{10.3}$$

进一步，引入

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} e_i, \tag{10.4}$$

$$e_i = \frac{1}{a_i} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_i b_{i-1} \cdots b_{i+k}}{a_i a_{i+1} \cdots a_{i+k} a_{i+k+1}}, (i > 0) \tag{10.5}$$

$$z_0 = 0,\ z_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_1 a_2 \cdots a_k}{b_1 b_2 \cdots b_k}, \tag{10.6}$$

$$z = \lim_{n\to\infty} z_n, \tag{10.7}$$

$$\tau = \inf\{t > 0 : \lim_{s \uparrow t} x(s) = \infty\}. \tag{10.8}$$

我们称 τ 为 X 的首次无穷. 已证明：对一切 $i \in E$ 有 $P_i(\tau < \infty) = 0$ 或 1，而且 $P_i(\tau < \infty) = 1$ 当且仅当 $R < \infty$；$E_0\tau = R$. 因此，R 是从 0 到∞的平均时间，而 S 在某种意义上是从∞到 0 的平均时间.

现在假定：给出了形如(10.1)的一个矩阵 Q，且 $R < \infty$. 我们去构造所有的 Q 过程. 1945 年 Doob 构造了一类 Q 过程，但不是全部. 他任取一个概率分布 $V = (v_i)$，则 Q 和 V 确定一个 Q 过程，满足 $P(x(\tau) = i) = v_i$. 熟知，称之为(Q, V)Doob 过程.

我们引进一列特征数，它刻划过程 X 在首次无穷后如何地从∞回到有穷状态上来.

依照 Q 过程 X，可以确定非负数列 $p, q, r_n, n \geqslant 0$：

$$\beta^{(n)} = \inf\{t : t \geqslant \tau,\ x(t) \leqslant n\}, \tag{10.9}$$

$$v_j^{(n)} = P(x(\beta^{(n)}) = j). \tag{10.10}$$

$$c_{ij} = \frac{z - z_i}{z - z_j}\ (\text{如 } i > j); \quad = 1\ (\text{如 } i \leqslant j). \tag{10.11}$$

$$R_n = \sum_{i=0}^{n-1} v_i^{(n)} c_{i0}, \quad S_n = v_n^{(n)} c_{n0}, \quad \Delta_n = R_n + S_n, \tag{10.12}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{R_n}{\Delta_n}=p \quad (\geqslant 0), \quad \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{\Delta_n}=q \quad (\geqslant 0). \quad (10.13)$$

$k=\max(i: v_i^{(i)}=1)$，任取常数 $r_k>0$ 以及

$$r_j=\begin{cases}(v_j^{(n)}/v_k^{(n)})r_k, \text{不依赖于 } n>\max(j,k), \text{如 } k<\infty; \\ 0, \text{如 } k=\infty.\end{cases} \quad (10.14)$$

我们称$\{p, q, r_n, n\geqslant 0\}$为 Q 过程 X 的特征数列，如果 $r_n'=cr_n$($0<c$ 为常数，$n\geqslant 0$)，则$\{p,q,r_n',n\geqslant 0$ 也是 X 的特征数列. 我们视$\{p, q, r_n, n\geqslant 0\}$和$\{p, q, r_n', n\geqslant 0\}$为同一特征数列. 则可以证明

$$p+q=1. \quad (10.15)$$

$$0<\sum_{n=0}^{\infty}r_n c_{n0}<\infty, \text{如 } p>0. \quad (10.16)$$

$$r_n=0, \text{如 } p=0. \quad (10.17)$$

定理 10.1 设给定一个形如(10.1)的矩阵 Q，满足条件 $R<\infty$，$S<\infty$. 则下面的结论成立：

(i) 任意 Q 过程 X 的特征数列$\{p, q, r_n, n\geqslant 0\}$必定满足(10.15)、(10.16)、(10.17).

(ii) 反之，如果给定满足(10.15)、(10.16)、(10.17)的非负数列 $p, q, r_n, n\geqslant 0$，则存在一个唯一的 Q 过程 X，其特征数列与给定的数列重合，其转移概率 $P_{ij}(t)$满足

$$P_{ij}(t)=\lim_{n\to\infty}P_{ij}^{(n)}(t), \quad (10.18)$$

这里 $P_{ij}^{(n)}(t)$是$(Q, V^{(n)})$Doob 过程的转移概率，$V^{(n)}=(v_0^{(n)}, \cdots, v_n^{(n)})$按下面方式给定：

$$\left.\begin{aligned} v_j^{(n)}&=X_n\frac{r_j}{A_n} \quad (j=0,1,\cdots,n-1), \\ v_n^{(n)}&=Y_n+X_n\frac{\sum_{l=n}^{\infty}r_l c_{ln}}{A_n}; \end{aligned}\right\} \quad (10.19)$$

而
$$0\leqslant A_n=\sum_{l=0}^{\infty}r_l c_{ln}<\infty, \quad (10.20)$$

$$
\left.\begin{aligned}
X_n &= \frac{pA_n(z-z_n)}{pA_n(z-z_n)+qA_0z},\\
Y_n &= \frac{qA_0z}{pA_n(z-z_n)+qA_0z}.
\end{aligned}\right\} \tag{10.21}
$$

$\left(\text{约定}\frac{0}{0}=0\right)$.

特别地，$\{p=0, q=1, r_n\equiv 0\}$给出满足 Kolmogorov 向前和向后方程组的唯一的 Q 过程. 此过程从∞"连续地"流入到有穷状态.

在 $R<\infty$, $S=\infty$的情形，我们可类似地构造所有的 Q 过程. 由于 $S=\infty$，过程"连续地" 流入不可能，因此，Q 过程较 $S<\infty$ 情形少一些. 详见 2.8 节.

2) 2.7 节的基本定理 2 和 2.8 节的基本定理 3 解决了生灭过程的构造问题，但用两种不同的 Doob 过程变换来分别处理 $S<\infty$和 $S=\infty$的情形. 后来，对 $S<\infty$和 $S=\infty$两种情形作了统一处理. 因而构造理论为下面的定理所改进，该定理同时地处理 $S<\infty$和 $S=\infty$的情形. 设 $R_i=\sum\limits_{j=i}^{\infty}m_j$.

基本定理 设给定(10.1)形的矩阵 Q，且满足条件 $R<\infty$，则下面的结论成立.

(i)对任意的 Q 过程 X 按(10.9)～(10.14)确定的非负数列$(p, q, r_n, n\geqslant 0)$，称为 X 的特征数. 如果 $r_n'=cr_n(n\geqslant 0, c$ 为正常数)，则$(p, q, r_n', n\geqslant 0)$也是 X 的特征数列，并且视$(p, q, r_n, n\geqslant 0)$与$(p, q, r_n', n\geqslant 0)$为同一特征数列. X 的特征数列必定满足关系

$$p+q=1; \tag{10.22}$$

$$0<\sum_{i=0}^{\infty}r_iR_i<\infty, \text{ 如 } p>0, \tag{10.23}$$

$$r_n=0, \text{ 如 } p=0; \tag{10.24}$$

$$q=0, \text{ 如 } S=\infty. \tag{10.25}$$

(ii)反之，如果给定满足(22)～(25)的非负数列，则存在一个唯一的 Q 过程 X，使其特征数列与给定的数列重合，其转移概

率满足

$$P_{ij}(t)=\lim_{n\to\infty}P_{ij}^{(n)}(t). \tag{10.26}$$

这里 $P_{ij}^{(n)}(t)$是$(Q, V^{(n)})$Doob 过程的转移概率，而分布 $V^{(n)}=(v_0^{(n)}, \cdots, v_n^{(n)})$如下确定：

如 $p=0$，则令

$$v_j^{(n)}=0\ (0\leqslant j<n),\ v_n^{(n)}=1; \tag{10.27}$$

如 $p>0$，则令

$$\left.\begin{aligned} v_j^{(n)} &= X_n\frac{r_j}{A_n} \quad (0\leqslant j<n), \\ v_n^{(n)} &= Y_n + X_n\frac{\sum\limits_{l=n}^{\infty}r_l c_{ln}}{A_n}; \end{aligned}\right\} \tag{10.28}$$

其中

$$0<A_n=\sum_{l=0}^{\infty}r_l c_{ln}<\infty, \tag{10.29}$$

$$\left.\begin{aligned} X_n &= \frac{pA_n(z-z_n)}{pA_n(z-z_n)+qA_0z}, \\ Y_n &= \frac{qA_0z}{pA_n(z-z_n)+qA_0z}. \end{aligned}\right\} \tag{10.30}$$

基本定理的证明可在下面的专著中找到：

(1)Wang Zikun, Yang Xiangqun. Birth and Death Processes and Markov Chains. Berlin: Springer-Verlag, Bejing: Science Press, 1992. § 6.6, p. 234.

(2)王梓坤. 生灭过程与马尔可夫链. 北京：科学出版社. 1979. 第六章.

(3)Yang Xiangqun. The Construction Theory of Denumerable Markov Processes. Chichester: Wiley & sons. Changsha: Hunan Science and Technology Hause. 1990.

(4)杨向群. 可列马尔可夫过程构造论. 长沙：湖南科技出版社. 1986. 第2版.

3）本篇中所用到的关于生灭过程的性质，在此补加证明*，以便于阅读正文. 以下无特别声明时，恒设 Q 为生灭过程的密度矩阵，即满足(1.7).

定理 10.3(Добрушин[2]) 对已给形如 10.1 的 Q，Q 过程唯一的充要条件是 $R=\infty$.

证 考虑任一可分 Q 过程 $X=\{x(t),t\geqslant 0\}$，它在跳跃点上右连续. 利用(2.6)定义 τ，则当且只当 $P(\tau=\infty)=1$ 时，Q 过程唯一，故只要证明：当且只当 $R=\infty$时，$P(\tau=\infty)=1$.

用(2.5)定义 ξ_{i+1}，令 $m_i=E_i\xi_{i+1}$. 由强马尔可夫性

$$m_i=\frac{b_i}{a_i+b_i}\cdot\frac{1}{a_i+b_i}+\frac{a_i}{a_i+b_i}\cdot\left(\frac{1}{a_i+b_i}+m_{i-1}+m_i\right)\quad(i>0),$$

$$m_0=\frac{1}{b_0}.$$

解此即得 $m_i=\dfrac{1}{b_i}+\displaystyle\sum_{k=0}^{i-1}\frac{a_ia_{i-1}\cdots a_{i-k}}{b_ib_{i-1}\cdots b_{i-k}b_{i-k-1}}\quad(i\geqslant 0)$，此即(2.1).

因 $\tau=\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n$，由积分单调收敛定理，$E_0\tau=\lim\limits_{n\to\infty}E_0\xi_n$. 对 ξ_i 用强马尔可夫性，令 $\xi_0\equiv 0$，得

$$\begin{aligned}E_0\xi_n&=E_0\Big[\sum_{i=0}^{n-1}(\xi_{i+1}-\xi_i)\Big]\\&=\sum_{i=0}^{n-1}E_0(\xi_{i+1}-\xi_i)\\&=\sum_{i=0}^{n-1}E_0[E_0(\xi_{i+1}-\xi_i\,|\,\mathscr{B}_{[0,\xi_i]})]\\&=\sum_{i=0}^{n-1}E_i\xi_{i+1}=\sum_{i=0}^{n-1}m_i,\end{aligned}$$

因此

---

* 请参看 2.1 节最后一段.

$$E_0\tau = \sum_{i=0}^{\infty} m_i = R.$$

类似地有

$$E_j\tau = \sum_{i=j}^{\infty} m_i \leqslant R \quad (j \in E).$$

如 $P(\tau=\infty)=1$，由于 $X=\{x(t),\ t\geqslant 0\}$ 是任意的 Q 过程，故 $P_0(\tau=\infty)=1$，于是 $R=E_0\tau=\infty$.

反之，如 $P(\tau=\infty)<1$，则必 $R<\infty$. 事实上，由于 $P(\tau<\infty)>0$ 及(1.7)，得 $P_0(\tau<\infty)>0$. 存在 $T>0$ 及 $\alpha>0$，使 $P_0(\tau\leqslant T)\geqslant\alpha$，从而对一切 $k\in E$，$P_k(\tau>T)\leqslant P_0(\tau>T)\leqslant 1-\alpha$. 由引理 4.1(那里的其他条件均满足)即得 $R=E_0\tau<\infty$. ∎

定理 10.4(Harris)　设齐次马氏链的一步转移概率为

$$p_{01}=1,\ p_{ii+1}=\frac{b_i}{a_i+b_i},\ p_{ii-1}=\frac{a_i}{a_i+b_i}$$
$$(a_i>0,\ b_i>0,\ i>0), \tag{10.31}$$

则对 $n>k>j$，自 k 出发，在到达 n 以前先到达 j 的概率为 $\frac{z_n-z_k}{z_n-z_j}$，这里 z_n 由(2.4)定义.

证　在直线上取点集 $A=(z_0,\ z_1,\ \cdots)$，设 $Y=\{y(t),\ t\geqslant 0\}$ 是以 0 为反射壁的布朗运动(Wiener 过程)，$P(y(0)=z_k)=1$. 考虑此过程的轨道:对任一固定的 t，以 x 表在 t 以前(包括 t 在内)最后一次落在 A 时所处的点的下标，x 是随机变量. 当 t 自 0 变向 ∞ 时得一列随机变量 x_j，$j\geqslant 0$，$P(x_0=k)=1$. 由于 Y 是齐次马氏过程，知 x_j，$j\geqslant 0$ 是齐次马氏链. 利用布朗运动的一性质:设布朗质点开始时位在点 B，$A<B<C$，则它在到达 C 以前先到达 A 的概率为 $\frac{C-B}{C-A}$. 由此得

$$P(x_1=k-1\,|\,x_0=k)=\frac{z_{k+1}-z_k}{z_{k+1}-z_{k-1}}=\frac{a_k}{a_k+b_k},$$

$$P(x_1=k+1\,|\,x_0=k)=\frac{z_k-z_{k-1}}{z_{k+1}-z_{k-1}}=\frac{b_k}{a_k+b_k}.$$

换言之，x_j，$j\geqslant 0$ 的转移概率由(10.5)决定.

今考虑 $n>k>j$. 对 x_j, $j\geqslant 0$, 质点自 k 出发, 在到达 n 以前先到达 j 的概率, 等于对 Y, 质点自 z_k 出发, 在到达 z_n 以前先到达 z_j 的概率. 再次利用上述布朗运动的性质, 即得证此概率为 $\frac{z_n-z_k}{z_n-z_j}$. ∎

由于 Doob 过程在本篇中是构造全体 Q 过程的基石, 故在此回忆一下它的定义. 设已给任一满足(1.6)的密度矩阵 Q, 使 $P(\tau<\infty)=1$, τ 由(2.6)定义. 在$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上考虑一列相互独立的 Q 过程 $X^{(n)}=\{x^{(n)}(t), t\geqslant 0\}(n=1, 2, \cdots)$, 它们可分, 在跳跃点上右连续, 又 $X^{(n)}(n>1)$有共同的开始分布为 π. 对$X^{(n)}$用(2.6)定义得 $\tau^{(n)}(n\geqslant 1)$. 令 $\tau_0=0$, $\tau_n=\sum_{\nu=0}^{n}\tau^{(\nu)}$, 由独立性, $\tau_n\uparrow\infty$. 定义

$$x(t, \omega)=x^{(n)}(t-\tau_{n-1}(\omega), \omega), \text{如 } \tau_{n-1}(\omega)\leqslant t<\tau_n(\omega),$$

则称 $X=\{x(t), t\geqslant 0\}$为 Doob 过程. 由于 X 的转移概率完全由 Q 及 π 决定, 故也称它为(Q, π)Doob 过程.

参考文献

[1] Chung K L. Markov chains with stationary transition probabilities. 1st ver. 1960. 2nd ver. 1966. Berlgn:Spring-Verlag.

[2] Добрушин Р Л. Об условиях регулярности однородных по времени Марковских процессов со счетным числом возможных состояний. успеХи Матем. Наук, 1952, 7(6): 186～191

[3] Добрушин Р Л. Некоторые классы однородных счетных Марковских Процессов. Теория Вероят. и ее Прим. 1957, 1 (3): 377～380

[4] Doob J L. Stochastic processes. New York: John Wiley & Sons. 1953.

[5] Дынкин Е Б. Основания теории Марковских процессов. Москва: Физматгиз 1959. (邓肯 Е Б. 马尔可夫过程论基础. 王梓坤译, 北京: 科学出版社. 1962)

[6] Дынкин Е Б. Скачкообразные Марковские процессы. теория вероят. и ее прим. 1958, Ⅲ (1) : 41～60

[7] Feller W. on the integro-differential equations of purely discontinuous Markoff process. Trans. Am. Math. soc. 1940, 48 : 488～518. ibid, 1945, 58 : 474

[8] Feller W. On boundaries and lateral conditions for Kolmogorov differential equations. Ann. of Math. , 1957, 65 : 527～570

[9] Harris T E. First passage and recurrence distribution. Trans. Am. Math. Soc. , 1952, 73 : 471～486

[10] Karlin S. , Mcgregor J. The differential equations of birth and death processes and the Stieltjies moment problem. Trans. Am. Math. soc. , 1957, 85(2) : 489～546

[11] Reuter G E H. Denumerable Markov processes and the associated semigroup on l. Acta Math. , 1957, 97 : 1～46

[12] Хинчин А Я. Метематические методы теории Массового обслуживания. 1955(欣钦 A Я. 公用事业理论的数学方法. 张里千，段涌泉译. 北京：科学出版社. 1958).

[13] 孙振祖. 一类马氏过程的表达式. 郑州大学学报，1962，2 : 17～23

[14] 王梓坤. Классификачция всех процессов размножения и гибели. Научные доклады высшей школы физматем. Науки，1958，4 : 19～25

[15] 王梓坤. 一个生灭过程. 科学记录，1959，新辑 3(8)：266～268

[16] Wang Tzu-kwen(王梓坤). On distributions of funtionals of birth and death processes and their applications in the theory of queues. Scientia Sinica(中国科学)，1961，X (2) : 160～170

第3篇 一个生灭过程*

设 $X=\{x(t), t\geqslant 0\}$ 为定义于某概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的可分齐次马氏过程(可分性定义见[3,第二章]),它具有可数多个状态 0,1,2,…及虚状态∞,使对任一 $t\geqslant 0$,$P(x(t)=\infty)=0$. 转移概率 $P_{ij}(t)=P\{x(t)=j|x(0)=i\}$满足关系式:

$$P_{ij}(t)\geqslant 0, \tag{1}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t) = 1, \tag{2}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t)P_{jk}(s) = P_{ik}(t+s), \tag{3}$$

$$\lim_{t\downarrow 0} P_{ij}(t)=P_{ij}(0)=\delta_{ij}, \tag{4}$$

其中 $t\geqslant 0$,$s\geqslant 0$,$\delta_{ii}=1$,$\delta_{ij}=0(i\neq j)$. 由(1)~(4)知极限

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{P_{ij}(t)-\delta_{ij}}{t}=q_{ij} \tag{5}$$

恒存在[2,3]. 令 $Q=(q_{ij})$为以 q_{ij}为元的矩阵,称 Q 为该过程的密度矩阵. 如 Q 具有形状:

---

* 具有已给 Q 的全体生灭过程已在[6]中找到,但那里未发现那一个是满足(7)、(8)的重要的 Q 过程.

$$Q=\begin{pmatrix} -b_0 & b_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_1 & -(a_1+b_1) & b_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n & -(a_n+b_n) & b_n & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix},\tag{6}$$

其中 $a_i>0(i>0)$，$b_i>0(i\geqslant 0)$为常数，则称 $X=\{x(t),\ t\geqslant 0\}$为生灭过程．令

$$R=\sum_{i=0}^{\infty}m_i;\quad S=\sum_{i=1}^{\infty}e_i,$$

其中

$$m_i=\frac{1}{b_i}+\sum_{k=0}^{i-1}\frac{a_ia_{i-1}\cdots a_{i-k}}{b_ib_{i-1}\cdots b_{i-k}b_{i-k-1}};$$

$$e_i=\frac{1}{a_i}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_ib_{i-1}\cdots b_{i-k}}{a_ia_{i+1}\cdots a_{i+k}a_{i+k+1}}.$$

R 的概率意义见[1]，S 的概率意义如下：令

$$Q_N=\begin{pmatrix} -b_0 & b_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & -(a_1+b_1) & b_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{N-1} & -(a_{N-1}+b_{N-1}) & b_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_N+b_N & -(a_N+b_N) \end{pmatrix}.$$

设 $X_N=\{x_N(t),t\geqslant 0\}$为具状态 0，1，2，…，$N$，密度矩阵为 Q_N 的可分齐次马氏过程，$P(x_N(0)=N)=1$．我们有

引理 设 $\tau_N(\omega)=\inf(t:x_N(t,\omega)=0)$，则 $\tau_N(\omega)$的数学期望 $E\tau_N\to S\ (N\to\infty)$．

粗略地说，这引理表示：对过程 $X=\{x(t),\ t\geqslant 0\}$而言，$S$ 为自虚状态∞到达状态 0 所需的平均时间；而[1]则表示：R 为自 0 到∞所需的平均时间．

固定 ω，t 轴上之点 $\tau(\omega)$称为函数 $x(t,\omega)$的飞跃点，如对任意 $\varepsilon>0$，在区间$[\tau(\omega)-\varepsilon,\ \tau(\omega))$内，$x(t,\omega)$取无限多个不同的

值.

现在来研究反面的问题:设已给一形如(6)的矩阵 Q，问是否恒存在生灭过程，其 $P_{ij}(t)$满足(1)、(2)、(3)、(4)，而且其密度矩阵恰为 Q? [4]中证明答案是肯定的,那里(以及[1])还证明了，如 $R=\infty$，则如是之过程(简称 Q 过程)唯一，且其 $P_{ij}(t)$尚满足柯尔莫各洛夫向前微分方程组:

$$P'(t)=P(t)\cdot Q, \tag{7}$$

$$P(0)=I, \tag{8}$$

其中 $P(t)$及 $P'(t)$分别为以 $P_{ij}(t)$及 $P'_{ij}(t)$为元之无穷维矩阵，I 为么矩阵. 此唯一之过程已在[4]中求出. 如 $R<\infty$，在[2]中已找到无穷多个 Q 过程，但并未全部找出. [5]中则进一步证明:当 $R<\infty$，$S=\infty$时，没有一个 Q 过程能满足(7)、(8)，但如 $R<\infty$，$S<\infty$，则存在一个而且只有一个 Q 过程能满足(7)、(8).

本篇的目的，就是要在条件 $R<\infty$，$S<\infty$下，找出满足(7)、(8)的唯一的 Q 过程.

如 $R<\infty$，$S<\infty$，可以证明，存在一概率空间$(\Omega, \mathscr{B}, P)$，使:

(i) 在$(\Omega, \mathscr{B}, P)$上可定义一列$(Q, \pi^{(n)})$Doob 过程 $X_n=\{x_n(t), t\geqslant 0\}(n=1, 2\cdots)$，这里 X_n 由 Q 及分布 $\pi^{(n)}=\{\delta_{in}\}$(即质量集中在状态 n 上之分布)依第 2 篇 2.10 节最后一段的方式定义. * 这些过程的转移概率分别记为 $P_{ij}^{(n)}(t)(n=1, 2, \cdots)$;

(ii) 如 $n>m$，则 $X_n=\{x_n(t), t\geqslant 0\}$和 $X_m=\{x_m(t), t\geqslant 0\}$间有以下关系:在 t 轴上定义二点列$\{\tau_k(\omega)\}\{\beta_k(\omega)\}$如下，令 $\tau_1(\omega)$是$x_n(t, \omega)$的第一个飞跃点，$\beta_1(\omega)=\inf(t: t\geqslant\tau_1(\omega), x_n(t, \omega)\leqslant m)$，如果 $\tau_{k-1}(\omega)$，$\beta_{k-1}(\omega)$已经定义，则令 $\tau_k(\omega)$为大于$\beta_{k-1}(\omega)$

* 亦可参见文献[3]中第 267 页定理 2.5. ——编者

的最小的飞跃点，而 $\beta_k(\omega)=\inf(t: t\geqslant\tau_k(\omega), x_n(t,\omega)\leqslant m)$. 可以证明，$P(\tau_k<\infty)=1$，$P(\beta_k<\infty)=1$. 今抛去 $x_n(t,\omega)$ 在区间 $(\tau_k(\omega), \beta_k(\omega))(k=1, 2, \cdots)$ 上之图像，并将余下的各区间(因之其上的曲线段)向左移动(但第一个区间 $[0, \tau_1(\omega)]$ 不动)，使保持原有次序，且上一区间之终点 $\tau_k(\omega)$ 与下一区间之起点 $\beta_k(\omega)$ 重合，则所得恰为 Q 过程 $x_m(t,\omega)$. 记此关系为

$$g_{nm}[x_n(t,\omega)]=x_m(t,\omega). \tag{9}$$

现在可以叙述我们的主要结果：

定理 设已给矩阵(6)满足条件 $R<\infty$，$S<\infty$，则在 $(\Omega, \mathscr{B}, P)$ 上存在唯一一个 Q 过程 $X=\{x(t), t\geqslant 0\}$，它有下列性质：

(i) 可以找到可测集 C，$\mathrm{P}(C)=1$，使对任一固定的 $\omega\in C$，$x_n(t,\omega)$ 几乎处处(对 t 轴上的勒贝格测度而言)收敛于 $x(t,\omega)$；

(ii) 对任意有限多个固定的 $t_1, t_2, \cdots, t_k$，有

$$\mathrm{P}(x_n(t_i,\omega)\to x(t_i,\omega), i=1, 2, \cdots, k)=1;$$

(iii) 如以 $P_{ij}(t)$ 表 $X=\{x(t), t\geqslant 0\}$ 的转移概率，则 $P_{ij}^{(n)}(t)\to P_{ij}(t)$，且 $P_{ij}(t)(i, j=0, 1, 2, \cdots)$ 满足柯尔莫果洛夫向前微分方程组(7)、(8).

我们可以如下直觉地理解 $\{x(t,\omega), t\geqslant 0\}$ 的结构：设质点 A 沿 $\{x_n(t,\omega), t\geqslant 0\}$ 的迹线而运动，则每当它到达"边界"∞后，由 $\{x_n(t,\omega), t\geqslant 0\}$ 的定义，A 必以概率 1 立即到达状态 n，然后如常运动. 现在令 $n\to\infty$，则由定理可设想如 A 沿 $\{x(t,\omega), t\geqslant 0\}$ 的迹线运动，每当它到达∞后，它自∞"连续"地回到有限状态上来. 条件 $R<\infty$ 保证 A 以概率 1 可到达∞，条件 $S<\infty$ 则保证 A 可自∞"连续"地回到有限状态上来.

参 考 文 献

[1] Добрушин Р Л. Усп. Матем. Наук. 1952, 7(6): 185～191

[2] Doob J L. Trans. Am. Math. Soc., 1945, 58: 455～473

[3] Doob J L. Stochastic processes. New York: John Wiley & Sons. 1953.

[4] Feller W. Trans. Am. Math. Soc. , 1940, 48 : 488～515. ibid. , 1945, 58 : 474

[5] Reuter G E H. Acta Math. , 1957, 97 : 1～46

[6] Ван Цзы-кун (王 梓 坤). Научные доклады высшей школы, физматем. науки. 1958, 4 : 19～25

第 4 篇　生灭过程的遍历性与零壹律

4.1　基本概念与特征数

设 $X=\{x(t), t\geqslant 0\}$ 是定义在概率空间 $(\Omega, \mathscr{B}, P)$ 上的具有可列多个状态的齐次马氏过程，$\Omega=(\omega)$，相空间为 $E=(0, 1, 2, \cdots)$，转移概率 $P(t)=(P_{ij}(t))(i\geqslant 0, i, j\in E)$ 满足条件：对任一 $i\in E$ 有

$$P_{ij}(t)\geqslant 0, \sum_{j\in E}P_{ij}(t)=1. \tag{1.1}$$

$$\sum_{k\in E}P_{ik}(t)P_{kj}(s)=P_{ij}(t+s)\quad (t\geqslant 0, s\geqslant 0). \tag{1.2}$$

$$\lim_{t\to 0}P_{ii}(t)=1. \tag{1.3}$$

由此知存在极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{P_{ij}(t)-\delta_{ij}}{t}=q_{ij}\quad (i, j\in E), \tag{1.4}$$

其中　$\delta_{ii}=1, \delta_{ij}=0(i\neq j)$. 以后恒设

$$0<\sum_{j\neq i}q_{ij}=-q_{ii}\equiv q_i<\infty\quad (i\in E) \tag{1.5}$$

称 $Q=(q_{ij})$ 为密度矩阵，而 X(或 $P(t)$)称为 Q 过程，以表示它与 Q 有(1.4)的关系，特别，如

$$\left.\begin{array}{l} q_{ii+1}=b_i(>0),\ q_{ii-1}=a_i(>0), \\ q_{ii}=-(a_i+b_i),\ q_{ij}=0(\text{如}\ |i-j|>1). \end{array}\right\} \tag{1.6}$$

(补定义 $a_0=0$)，称这种 Q 过程为生灭过程.

我们的目的是：设已给(1.6)形的矩阵 Q，试讨论以此 Q 为密度矩阵的全体 Q 过程的遍历性，零壹律以及过份函数的性质.

令 N^t 为由 $\{x(u), u\geqslant t\}$ 所产生的 σ 代数，$\Pi=\bigcap\limits_{t\geqslant 0} N^t$. 对 $i\in E$，令

$$\mathscr{A}_i=(A: A\in\Pi, \text{而且对任一}\ t\geqslant 0, \text{有}\ P_i(\theta_t A\triangle A)=0),$$

其中 θ_t 表过程的推移算子，$\triangle$ 表示对称差，P_i 表示开始分布集中在 i 的条件概率，以后 E_i 表示关于 P_i 的数学期望. 最后令 $\mathscr{A}=\bigcap\limits_{i\in E}\mathscr{A}_i$，$\mathscr{A}$ 中的集称为不变集. 如对任一不变集 A 及任一 $i\in E$，有 $P_i(A)=0$ 或 1，就说对 X 零壹律成立.

不妨设 X 是完全可分的 Borel 可测过程，令

$$\eta_i(\omega)=\inf(t: t>\tau(\omega),\ x(t,\omega)=i), \tag{1.7}$$

其中 $\tau(\omega)$ 为第一个跳跃点，即

$$\tau(\omega)=\inf(t: x(t,\omega)\neq x(0,\omega)) \tag{1.8}$$

状态 i 称为常返的，如 $P_i(\eta_i<\infty)=1$；称为遍历的，如 $E_i\eta_i<\infty$；如一切状态都常返(遍历)，就说过程 X 常返(遍历). 显然遍历必常返.

引进数字特征

$$m_i=\frac{1}{b_i}+\sum_{k=0}^{i-1}\frac{a_i a_{i-1}\cdots a_{i-k}}{b_i b_{i-1}\cdots b_{i-k} b_{i-k-1}} \quad (i\geqslant 0); \tag{1.9}$$

$$e_i=\frac{1}{a_i}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_i b_{i+1}\cdots b_{i+k}}{a_i a_{i+1}\cdots a_{i+k} a_{i+k+1}} \quad (i>0); \tag{1.10}$$

$$R=\sum_{i=0}^{\infty}m_i,\quad S=\sum_{i=1}^{\infty}e_i; \tag{1.11}$$

$$z_0=0, z_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_1 a_2\cdots a_k}{b_1 b_2\cdots b_k},\ z=\lim_{n\to\infty} z_n. \tag{1.12}$$

这些数字的概率意义见[1]，粗略地说，R 是质点沿过程的轨道自零出发首次到达∞的平均时间，而 S 是自 n 出发首次到达 0 的

平均时间(改造 n 为反射壁)且当 n 趋于∞时的极限.

如果 $R=\infty$，在[2]中已证明:X 常返的充要条件是 $z=\infty$;X 遍历的充要条件是 $z=\infty$，$e_1<\infty$. 因此我们只要研究 $R<\infty$时 X 的常返性与遍历性，结果证明了:如 $R<\infty$，一切生灭过程都是遍历的，因而都是常返的. 其次证明了:对一切生灭过程(不论 R 是否等于∞)，零壹律成立. 最后考虑生灭过程的过份函数$\{f_n\}$*，结果发现:必存在极限$\lim\limits_{n\to\infty}f_n$;特别，如 $R<\infty$，或 $R=\infty$且 $z=\infty$，则 $f_n=f$(常数). 这样，生灭过程的遍历性、常返性和零壹律成立的问题得以完满解决.

4.2 常返性和遍历性

由(1.6)知 $P_{ij}(t)>0$(一切 $t>0$，i，$j\in E$)，即一切状态互通，故为证 X 常返(遍历)，只要证某一状态常返(遍历)就够了.

以后无特别声明时，总设已给的 Q 是满足(1.6)的矩阵.

定理 2.1 如 $R<\infty$，则一切 Q 过程 X 常返.

证 由于 $R<\infty$，Q 过程不唯一，例如 Doob 过程就是一种 Q 过程(Doob 过程的定义见[1]或[3]，它由 Q 及 E 上一概率分布 $\pi=(\pi_0,\pi_1\cdots)$所决定，故记为(Q,π)过程**). 全体 Q 过程的集记为$\{A\}$，全体 Doob 过程记为$\{D\}$.

先设 $X\in\{D\}$，试证 X 常返. 实际上，由于 $R<\infty$，存在一列飞跃点[1] $\tau_1<\tau_2<\cdots<\tau_n\to\infty$. 不妨设 $P(x(0)=i)=1$. 在$[\tau_k,\tau_{k+1}]$中没有 i 区间(定义见[3])的概率为 $\sum\limits_{j>i}\pi_j(1-c_{ji})<1$，其中 $c_{ji}=\dfrac{z-z_j}{z-z_i}<1$，(参看[1]). 因此，在$[\tau_1,\tau_{n+1})$中，没有 i 区间的概

---

* 由于 E 可列，定义在 E 上的函数是一序列.

** 亦可见第 2 篇 2.10 节.——编者

率为$[\sum_{j>i}\pi_j(1-c_{ji})]^n$，当$n\to\infty$时，此概率趋于0，故自$i$出发，回到$i$的概率为1，于是知$X$常返.

今设$X\in\{A\}$，$P(x(0)=i)=1$，由[1]知X是一列Doob过程X_n的极限，而且X_n的任一i区间保留为X的i区间，故X也常返. ∎

定理2.2 如$R<\infty$，则一切Q过程X遍历.

证 分两种情况考虑:先设$S<\infty$. 以m_{ij}表示自i出发首次到达j的平均时间*，即$m_{ij}=E_i\eta_j$，则

$$m_{ii}=\frac{1}{a_i+b_i}+\frac{a_i}{a_i+b_i}m_{i+1,i}+\frac{b_i}{a_i+b_i}m_{i-1,i}.$$

如$X\in\{D\}$，不难看出$m_{i-1,i}<R$，$m_{i+1,i}\leqslant R+S$，故

$$m_{ii}\leqslant\frac{1}{a_i+b_i}+R+S<\infty,$$

即m_{ii}对一切$X\in\{D\}$有界. 如$X\in\{A\}$，取一列$X_n\in\{D\}$，使X_n在[1]的意义下收敛于X**，对X_n及X分别用(1.7)式定义的随机变量记为$\eta_i^{(n)}$及η_i，则$\eta_i^{(n)}\uparrow\eta_i$，由单调收敛定理得

$$\lim_{n\to\infty}m_{ii}^{(n)}=\lim_{n\to\infty}E_i\eta_i^{(n)}=E_i\eta_i,$$

既然$m_{ii}^{(n)}\leqslant\frac{1}{a_i+b_i}+R+S$，故$E_i\eta_i<\infty$而$X$遍历.

次设$S=\infty$，这时任一X的遍历性已在[1]中证明，参看[1]中(8.10)式或本书第2篇(8.10)式. ∎

注2.1 定理2.1的结论已含于定理2.2中，为了说明证明的方法(见[1，第168页iv***])，我们单独予以证明.

---

* m_{ii}应理解为自i出发，离开i后首次回到i的平均时间.

** 即，以概率1，X_n的样本函数$x_n(t,\omega)$关于勒贝格测度对几乎一切t收敛于X的样本函数$x(t,\omega)$，$(n\to\infty)$.

*** 见本书第2篇2.9;iv. ——编者

4.3 过份函数极限的存在性和零壹律

称 Q 过程 X 为规则的，如果它完全可分、Borel 可测，而且它的样本函数在任一有限 t 区间内以概率 1 只有有限多个跳跃点．因而规则 Q 过程的样本函数以概率 1 是跳跃函数．跳跃点列设为 $\{\xi_n\}$，$\xi_0\equiv 0$，则 $\xi_n\uparrow\infty$ 的概率为 1，$(n\to\infty)$．令

$$y_n = x(\xi_n+0), \tag{3.1}$$

即 $y_n=\lim\limits_{t\downarrow\xi_n}x(t)$，则 $\{y_n\}, n=0, 1, 2, \cdots$ 是一马氏链，称之为 X 的嵌入马氏链．

称非负序列 $\{f_i\}(i\in E)$ 为 X(或 $P(t)$)的过份函数(可取 ∞ 为值)，如对任一 $t\geqslant 0$，任一 $i\in E$，有

$$\sum_{j\in E}P_{ij}(t)f_j\leqslant f_i. \tag{3.2}$$

(在一些文献里，过份函数的定义中还要求 $\lim\limits_{t\to 0}\sum\limits_{j\in E}P_{ij}(t)f_j=f_i$，我们这里无需此条件)．

以下所谓"任意生灭过程"是指"任意(1.6)形的 Q 及任意 Q 过程"．

定理 3.1 设 X 为任意生灭过程，$\{f_i\}$ 为 X 的任一过份函数，则必存在极限

$$\lim_{i\to\infty}f_i=f. \tag{3.3}$$

如 $R<\infty$，或 $R=\infty$ 且 $z=\infty$，则 $f_i\equiv f$(常数)．

证 如对某 j，$f_j=\infty$，则因 $P_{ij}(t)>0$ 对一切 i，$j\in E$ 及 $t>0$ 成立，故由(2.2)知 $f_i\equiv\infty$．因而不妨设 $\{f_i\}$ 是有限的过份函数．

如 $R<\infty$ 或 $R=\infty$ 且 $z=\infty$，由定理 2.1 及[2]，知 X 常返(以下恒不妨设 X 完全可分 Borel 可测)，但在[5]中证明了：如 X 是具可列多个状态的互通的常返马氏过程，则 X 的任一过份函

数恒等于常数. 由此知 $f_i \equiv f$.

剩下一种情形是 $R=\infty$ 且 $z<\infty$. 这时 X 非常返，然而是规则的. 以 N_t 表示由 $\{x(u), 0\leqslant u\leqslant t\}$ 所产生的 σ 代数，则 $\{f_{x(t)}, N_t, P\}$ 是可分的半 Martingale，于是 P 几乎地存在极限

$$\lim_{t\to\infty} f_{x(t,\omega)} = f(\omega). \tag{3.4}$$

既然 X 规则、非常返，故对几乎一切 ω 及任一正数 N，存在 $T(\omega)>0$，使当 $t\geqslant T(\omega)$ 时，有 $x(t,\omega)\geqslant N$，换句话说*，

$$P(\lim_{t\to\infty} x(t,\omega)=\infty)=1. \tag{3.5}$$

由此及 X 的规则性，可见对 X 的嵌入马氏链 $\{y_n\}$，也有 $P(y_n(\omega)\to\infty)=1$. 注意对生灭过程，自 i 出发，经一步跳跃后只能到 $i+1$ 或 $i-1$，故对几乎一切 ω，$y_n(\omega)$ 必取一切正整数(除有穷多个外)而趋于∞. 于是由(3.4)知以概率 1

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} f_{y_n(\omega)} = \lim_{t\to\infty} f_{x(t,\omega)} = f(\omega). \tag{3.6}$$

这说明 $f(\omega)$ 以概率 1 等于某常数 f，而且(3.3)成立. ∎

定理 3.2 对一切生灭过程 X，零壹律成立.

证 不妨设 X 完全可分 Borel 可测. 如 X 常返，由[4]中一般结果知对 X 零壹律成立.

设 X 非常返，即 $R=\infty$，$z<\infty$. 此时 X 还规则，从而(3.5)成立，不论开始分布如何. 任取不变集 $A\in\mathscr{U}$，由定义及马氏性知对任意 $t\geqslant 0$

$$\begin{aligned} P_i(A) &= P_i(\theta_t A) = \int_\Omega P_i(\theta_t A \mid N_t) P_i(d\omega) \\ &= \int_\Omega P_{x_t}(A) P_i(d\omega) = \sum_{j\in E} P_{ij}(t) P_j(A), \end{aligned} \tag{3.7}$$

所以作为 i 的函数 $\{P_i(A)\}$ 是 X 的过份函数，由定理 3.1、(3.6)，存在常数 f，使

$$f=\lim_{i\to\infty} P_i(A) = \lim_{t\to\infty} P_{x_t}(A). \tag{3.8}$$

注意 $A\in\mathscr{U}$，$P_i(A\triangle\theta_t A)=0$，故上式右方等于

---

* 如换 P 为 P_i，(2.5)(2.6)式同样正确.

$$\lim_{t\to\infty} P_i(\theta_t A \mid N_t) = \lim_{t\to\infty} P_i(A \mid N_t)$$
$$= P_i(A \mid N_\infty) = \chi_A(\omega) \quad (P_i\text{一几乎}). \tag{3.9}$$

$\chi_A(\omega)$是 A 的特征函数. 由(3.8)及(3.9)得

$$P_i(\chi_A(\omega) = f) = 1,$$

因而 $P_i(A) = 0$ 或 1. ∎

注 3.1 其实证明了更强的结论:对固定的 $A \in \mathscr{A}$,或 $P_i(A) \equiv 1$,或 $P_i(A) \equiv 0$. 这由(3.7)及 $P_{ij}(t) > 0 (t > 0)$推出.

作为一例,考虑生灭过程 X 的任一齐次非负可加泛函 $\varphi \equiv \varphi_t^S(\omega)$, $(0 \leqslant s \leqslant t < \infty)$(定义见[6],第 6 章),由于 $\varphi_\infty^0 = \varphi_t^0 + \theta_t \varphi_\infty^0$, $E_i \varphi_\infty^0 \geqslant E_i E_{x_t} \varphi_\infty^0$,可见函数 $f_i = E_i \varphi_\infty^0$对 X 过份,由定理 3.1,极限$\lim_{i\to\infty} E_i \varphi_\infty^0$存在.

最后,我们顺便指出特征数间的一关系.

设 $R < \infty$,则 $S < \infty$的充要条件是 $e_1 < \infty$. 实际上,由 $e_1 \leqslant S$ 立得必要性. 其次,易见

$$e_{n+1} = \frac{a_n}{b_n}\left(e_n - \frac{1}{a_n}\right)$$
$$= \frac{a_1 \cdots a_n}{b_1 \cdots b_n} e_1 - \frac{a_2 \cdots a_n}{b_1 b_2 \cdots b_n} - \frac{a_3 \cdots a_n}{b_2 b_3 \cdots b_n}$$
$$- \cdots - \frac{a_n}{b_{n-1} b_n} - \frac{1}{b_n}.$$

以之代入 $S = \sum_{n=1}^{\infty} e_n$,得一二重级数,按对角线求和,并注意

$$Z = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_1 a_2 \cdots a_k}{b_1 b_2 \cdots b_k},$$
$$R = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{b_n} + \frac{a_{n-1}}{b_n b_{n+1}} + \frac{a_{n+1} a_{n+2}}{b_n b_{n+1} b_{n+2}} + \cdots \right).$$

即得

$$S = e_1 z - \left(R - \frac{1}{b_0} z \right) = \left(e_1 + \frac{1}{b_0} \right) z - R.$$

由假定 $R < \infty$, $e_1 < \infty$,又 $z < \infty$,故 $S < \infty$.

参 考 文 献

[1] 王梓坤.生灭过程构造论.数学进展,1962,5(2):137~170

[2] Karlin S., Mcgregor J. L. The classification of birth and death processes. Trans. Am. Math. Soc., 1957, 86: 366~400

[3] Chung K L. Markov chains with stationary transition probabilities. 1st ver, 1960. 2nd ver. 1967.

[4] 王梓坤.马尔可夫过程的零壹律.数学学报,1965,15(3):342~353

[5] 王梓坤.常返马尔可夫过程的若干性质.数学学报,1966,16(2):166~178

[6] Дынкин Е Б. Марковские процессы. Москва: Госуд. издат. Физмат. Литер. 1963.(英译本:Dynkin E B. Markov Processes. Berlin: Springer-Verlag, 1965)

第5篇 生灭过程的泛函的分布及其在排队论中的应用

5.1 积分型泛函和两个引理

设 $X=\{x(t),t\geqslant 0\}$ 是生灭过程(其定义见[1]或[2])，具有转移概率密度矩阵 Q：

$$Q=\begin{pmatrix} -b_0 & b_0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_1 & -(a_1+b_1) & b_1 & 0 & \cdots \\ 0 & a_2 & -(a_2+b_2) & b_2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

其中 $b_i>0(i\geqslant 0)$，$a_i>0(i>0)$，按照[3—5]，我们可以假设*此过程是可分的、几乎强马尔可夫过程**. 这个假设不影响转移概率，因而也不影响矩阵 Q，但却保证了后面的某些运算的合理性. 设 0，1，2，…表示过程的状态，$V(k)(k=0,1,2,\cdots)$是定义在这些状态上的非负函数***. 本篇的主要目的是研究随机泛函

---

* 实际上我们可以假定此过程是典范过程就行了. 见第 7 篇的文献[1]或第 2 篇的文献[1]. ——编者

** 在[4]中被称为"Почти Строго Марковский Процесс".

*** 如无特别说明，假定 $V(t)\neq 0$.

$$\xi^{(n)}(\omega)=\int_0^{\tau^{(n)}}V[x(t)]\mathrm{d}t \tag{1.2}$$

$$\xi(\omega)=\lim_{n\to\infty}\xi^{(n)}(\omega) \tag{1.3}$$

的分布和矩，其中 $x(t)=x(t,\omega)$，$\tau^{(n)}=\tau^{(n)}(\omega)$是过程首达状态 n 的时刻，换言之，

$$\tau^{(n)}(\omega)=\inf(t: x(t,\omega)=n). \tag{1.4}$$

我们将看到，下面的 n 阶行列式起着重要的作用：

$$\delta_n(\lambda)=$$

$$\begin{vmatrix} M_0(\lambda) & b_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & M_1(\lambda) & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & M_2(\lambda) & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & M_{n-2}(\lambda) & b_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & M_{n-1}(\lambda) \end{vmatrix},$$

其中 $M_i(\lambda)=-(\lambda V(i)+a_i+b_i);i=0,1,\cdots,n-1$. λ 是实数参数，$a_0=0$. 按照最后一行展开，我们有

$$\left.\begin{aligned} &\delta_n(\lambda)=-(\lambda V(n-1)+a_{n-1}+b_{n-1})\delta_{n-1}(\lambda) \\ &\qquad -a_{n-1}b_{n-2}\delta_{n-2}(\lambda), \\ &\delta_1(\lambda)=-(\lambda V(0)+a_0+b_0), \\ &\delta_0(\lambda)=1(\text{约定}). \end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

在 $\delta_n(\lambda)$中的第 k 列用列向量$(0,0,\cdots,0,-b_{n-1})'$代替后得到的行列式记为 $\delta_n^{(k)}(\lambda)$（A'表示矩阵 A 的转置矩阵）.

首先证明两个引理：

引理 1.1 存在常数 $\theta>0$，使得当 $\lambda>-\theta$ 时 $\delta_n(\lambda)$非零且与 $(-1)^n$ 同号.

证 对 $\delta_0(\lambda)$和 $\delta_1(\lambda)$，引理是平凡的. 设引理结论对一切 $\delta_k(\lambda)$ $(k\leqslant n-1)$成立，我们证明对 $\delta_n(\lambda)$也成立. 因为 $\delta_n(\lambda)$是 λ 的连续函数，只需证明当 $\lambda\geqslant 0$ 时 $\delta_n(\lambda)$与$(-1)^n$ 同号即可. 考虑

$$\frac{\mathrm{d}\delta_n(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}=-V(0)\delta_{1,1}(\lambda)+V(1)(\lambda V(0)+a_0+b_0)\delta_{2,2}(\lambda)$$

$$-V(2)\delta_{3,3}(\lambda)-V(3)\delta_{4,4}(\lambda)-\cdots$$
$$-V(n-3)\delta_{n-2,n-2}(\lambda)$$
$$+V(n-2)[\lambda V(n-1)+a_{n-1}+b_{n-1}]\delta_{n-2}(\lambda)$$
$$-V(n-1)\delta_{n-1}(\lambda), \tag{1.6}$$

其中，$\delta_{k,k}(\lambda)$是 $n-1$ 阶行列式，它从 $\delta_n(\lambda)$中删除第 k 行和第 k 列而得，$\tilde{\delta}_{2,2}(\lambda)$是 $n-2$ 阶行列式，它从 $\delta_n(\lambda)$中删除开头两行和开头两列而得. 由于 $\delta_k(\lambda)(\lambda\geqslant 0)$的符号不决定于其元素的确切值，而仅仅依赖于它们的符号，行列式 $\delta_{1,1}(\lambda)$，$\tilde{\delta}_{2,2}(\lambda)$，$\delta_{3,3}(\lambda)$，$\delta_{4,4}(\lambda)$，…，$\delta_{n-2,n-2}(\lambda)$ 分别地与 $\delta_{n-1}(\lambda)$，$\delta_{n-2}(\lambda)$，$\delta_2(\lambda)\delta_{n-3}(\lambda)$，$\delta_3(\lambda)\delta_{n-4}(\lambda)$，…，$\delta_{n-3}(\lambda)\delta_2(\lambda)$有相同的符号. 按照归纳法假设，(1.6)的右方的每一项与$(-1)^n$ 同号，因此，$\frac{\mathrm{d}\delta_n(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}$也与$(-1)^n$ 同号. 由于$\frac{\mathrm{d}\delta_n(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}$连续，我们看出，当 $\lambda>0$ 时，

$$\delta_n(\lambda)=\int_0^\lambda \frac{\mathrm{d}\delta_n(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

也与$(-1)^n$ 同号.

最后，如果 $\lambda=0$，依(1.5)和归纳法易证.

$$\delta_n(0)=(-1)^n b_{n-1}b_{n-2}\cdots b_1 b_0.$$ ∎

引理 1.2 如果 $f_i^{(n)}\geqslant 0$，$f_i^{(n)}\uparrow f_i$，则

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1} f_i^{(n)}\right)=\sum_{i=0}^{\infty} f_i.$$

证 显然地，我们有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1} f_i^{(n)}\right)\leqslant\sum_{i=0}^{\infty} f_i.$$

而且，对任意的正整数 m 和任意 $\varepsilon>0$，如果所有的 f_i 有限，则我们可以找一个 $n>m$，使对一切 $i=0,1,\cdots,m$，

$$f_i^{(n)}>f_i-\frac{\varepsilon}{m+1}.$$

因而

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1} f_i^{(n)}\right)\geqslant\sum_{i=0}^{m} f_i^{(n)}>\sum_{i=0}^{m} f_i-\varepsilon.$$

由于 m 和 ε 均是任意的，故当一切 f_i 均有限时引理成立．最后，如果至少有一个 $f_i=\infty$，则引理平凡． ∎

5.2 泛函的分布和矩

考虑一个固定的正整数 n．令

$$\varphi_{k,n}(\lambda)=E_k e^{-\lambda\xi^{(n)}}. \tag{2.1}$$

这里 λ 是实的参数，而 E_k 表示当初始分布集中在状态 k 时的条件期望．令 $c_k=a_k+b_k$ 及

$$h=\min_{k\leqslant n-1}\left\{\frac{c_k}{V(k)};\theta\right\}>0,$$

其中 θ 按引理 1.1 确定(如 $c>0$，令 $\frac{c}{0}=\infty$)．

定理 2.1 (A) 当 $\lambda>-h$ 时，一切 $\varphi_{k,n}(\lambda)(k\leqslant n)$ 有限；(B) 它们是当 $\lambda>-h$ 时的方程组

$$\left.\begin{array}{l}a_k\varphi_{k-1,n}(\lambda)-(\lambda V(k)+a_k+b_k)\varphi_{k,n}(\lambda)+b_k\varphi_{k+1,n}(\lambda)=0\\(0\leqslant k\leqslant n-1),\\\varphi_{n,n}(\lambda)=1\end{array}\right\} \tag{2.2}$$

的唯一解，即

$$\varphi_{k,n}(\lambda)=\frac{\delta_n^{(k+1)}(\lambda)}{\delta_n(\lambda)}\quad(0\leqslant k\leqslant n,\delta_n^{(n+1)}(\lambda)=\delta_n(\lambda)). \tag{2.3}$$

证 首先，我们在假设(A)成立的前提下证明(B)．设 β 是过程在状态 k 的逗留时间(β 依赖于 k)．熟知，

$$P_k(\beta\leqslant t)=\begin{cases}1-e^{-c_k t} & (t\geqslant 0);\\0 & (t<0).\end{cases} \tag{2.4}$$

这里 P_k 表示初始分布集中在 k 时的条件概率．而且，我们有

$$\left.\begin{array}{l}P_k(x(\beta+0)=k+1)=\dfrac{b_k}{c_k},\\[2ex]P_k(x(\beta+0)=k-1)=\dfrac{a_k}{c_k}.\end{array}\right\} \tag{2.5}$$

依(2.5)，强马氏性，以及(2.4)，对 $k<n$ 有

$$
\begin{aligned}
\varphi_{k,n}(\lambda) &= E_k\left(e^{-\lambda\int_0^{\tau^{(n)}} V[x(t)]dt}\right) \\
&= \frac{b_k}{c_k} E_k\left(e^{-\lambda\int_0^{\beta} V[x(t)]dt - \lambda\int_{\beta}^{\tau^{(n)}} V[x(t)]dt} \,\middle|\, x(\beta+0) = k+1\right) \\
&\quad + \frac{a_k}{c_k} E_k\left(e^{-\lambda\int_0^{\beta} V[x(t)]dt - \lambda\int_{\beta}^{\tau^{(n)}} V[x(t)]dt} \,\middle|\, x(\beta+0) = k-1\right) \\
&= \frac{b_k}{c_k} E_k e^{-\lambda V(k)\beta} E_{k+1} e^{-\lambda\int_0^{\tau^{(n)}} V[x(t)]dt} \\
&\quad + \frac{a_k}{c_k} E_k e^{-\lambda V(k)\beta} E_{k-1} e^{-\lambda\int_0^{\tau^{(n)}} V[x(t)]dt} \\
&= \frac{b_k}{\lambda V(k) + a_k + b_k}\varphi_{k+1,n}(\lambda) \\
&\quad + \frac{a_k}{\lambda V(k) + a_k + b_k}\varphi_{k-1,n}(\lambda).
\end{aligned}
$$

在最后一步计算中，假定了 $\lambda > -\frac{c_k}{V(k)}$. 这个结果证实了(2.2)的前 n 个方程. 依 $\varphi_{n,n}(\lambda)$的定义，最后一个不等式是显然的. 按引理 1.1，当 $\lambda > -h$ 时方程组(2.2)的系数行列式非零. 因而 $\varphi_{k,n}(\lambda)(k=0, 1, \cdots, n)$提供了(2.2)的唯一解. 于是解(2.2)得(2.3).

现在往证(A). 依(2.1)，当 $\lambda \geqslant 0$ 时(A)平凡. 设 $0 > \lambda > -h$. 为证(A)，我们利用[6]的一个想法. 从引理 1.1 知(2.2)有唯一解 $\varphi(k)$, $k=0, 1, \cdots, n$. 可以证明

$$
\varphi(k) = \lambda E_k \int_0^{\tau^{(n)}} \varphi(x_t) V(x_t) dt + 1, \tag{2.6}
$$

这里 $x_t = x(t) = x(t, \omega)$. 事实上，考虑由

$$
A\varphi(k) = \frac{E_k \varphi(x_\beta) - \varphi(k)}{E_k \beta} \tag{2.7}
$$

定义的过程的广无穷小算子 A. 从(2.4)和(2.5)得

$$
\begin{aligned}
A\varphi(k) &= \left[\frac{b_k}{c_k}\varphi(k+1) + \frac{a_k}{c_k}\varphi(k-1) - \varphi(k)\right] \Big/ \frac{1}{c_k} \\
&= a_k \varphi(k-1) - (a_k + b_k)\varphi(k) + b_k \varphi(k+1).
\end{aligned}
$$

因此，方程 (2.2) 可改写为

$$\left.\begin{array}{l} A\varphi(k) - \lambda V(k)\varphi(k) = 0 \quad (0 \leqslant k \leqslant n-1), \\ \varphi(n) = 1. \end{array}\right\} \quad (2.8)$$

设 $\Psi(k)$ 表示 (2.6) 右方的函数. 显然 $\Psi(n) = 1$. 依 (2.7) 和 (2.8)，当 $k \leqslant n-1$ 时有

$$A\Psi(k) = \frac{E_k\Psi(x_\beta) - \Psi(k)}{E_k\beta}$$

$$= \frac{-\lambda E_k E_{x_\beta}\int_0^{\tau^{(n)}}\varphi(x_t)V(x_t)\mathrm{d}t + \lambda E_k\int_0^{\tau^{(n)}}\varphi(x_t)V(x_t)\mathrm{d}t}{E_k\beta}$$

$$= \frac{\lambda E_k\int_0^{\beta}\varphi(x_t)V(x_t)\mathrm{d}t}{E_k\beta} = \lambda V(k)\varphi(k) = A\varphi(k).$$

因此，依 A 的线性有

$$A[\Psi(k) - \varphi(k)] = 0 \quad (0 \leqslant k \leqslant n-1).$$

这些线性方程的系数行列式是 $\delta_n(0)$，由引理 1.1，它非 0，故方程组有唯一解，即

$$\Psi(k) = \varphi(k) \quad (0 \leqslant k \leqslant n-1);$$

而且

$$\Psi(n) = 1 = \varphi(n).$$

因而证明了等式(2.6). 为了证明当 $-h < \lambda < 0$ 时有 $E_k e^{-\lambda\int_0^{\tau^{(n)}}V(x_t)\mathrm{d}t} < \infty$，定义

$$u_0(k) \equiv 1, \quad (2.9)$$

$$u_m(k) = -\lambda E_k\int_0^{\tau^{(n)}}V(X_t)u_{m-1}(x_t)\mathrm{d}t + 1.$$

依(2.6) 和归纳有

$$u_m(\lambda) \leqslant \varphi(k). \quad (2.10)$$

另一方面，可以证明[6]

$$u_m(k) = \sum_{s=0}^{m} E_k\frac{\left[-\lambda\int_0^{\tau^{(n)}}V(x_t)\mathrm{d}t\right]^s}{s!} \uparrow E_k e^{-\lambda\xi^{(n)}}, \quad (2.11)$$

故

$$E_k e^{-\lambda\xi^{(n)}} \leqslant \varphi(k). \quad (2.12) \blacksquare$$

系 2.1 当 $\lambda > -h$ 时，方程(2.2)有唯一的正解；所有的行列式 $\delta_n^{(k)}(\lambda)(k=1,2,\cdots,n)$ 与 $(-1)^n$ 同号.

证 从(2.12)和(2.3)立即得出这些结果. ▮

由于 $\xi^{(n)}$ 的分布由我们已得出的 $\varphi_{k,n}(\lambda)$ 唯一地决定(见[8,第38页]和定理2.1(A))，寻求 $\xi^{(n)}$ 的分布的问题已经解决(关于测度 P_k, $k \leqslant n$).

现在转向研究矩 $E_k[\xi^{(n)}]^l$ (l 是正整数). 它们的存在性由定理2.1(A)得出，而且

$$E_k[\xi^{(n)}]^l = (-1)^l \varphi_{k,n}^{(l)}(0), \tag{2.13}$$

这里 $\varphi^{(l)}(0) = \left.\dfrac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}\lambda^l}\varphi(\lambda)\right|_{\lambda=0}$. 记 $E_k[\xi^{(n)}]^l$ 为 $m_{k,n}^{(l)}$.

定理 2.2 当 $k \leqslant n-1$ 时，

$$m_{k,n}^{(l)} = \sum_{i=k}^{n-1} G_{i,n}^{(l)}, \quad m_{n,n}^{(l)} = 0, \tag{2.14}$$

其中

$$G_{i,n}^{(l)} = \frac{lV(i)m_{i,n}^{(l-1)}}{b_i} + \sum_{k=0}^{i-1} \frac{a_i a_{i-1}\cdots a_{i-k} lV(i-k-1)m_{i-k-1,n}^{(l-1)}}{b_i b_{i-1}\cdots b_{i-k} b_{i-k-1}}. \tag{2.15}$$

证 关于 λ 微分(2.2)式 l 次并令 $\lambda=0$，乘以 $(-1)^l$，从(2.13)得

$$\left.\begin{array}{l} a_k m_{k-1,n}^{(l)} - (a_k+b_k)m_{k,n}^{(l)} + b_k m_{k+1,n}^{(l)} + lV(k)m_{k,n}^{(l-1)} = 0 \\ \qquad (0 \leqslant k \leqslant n-1), \\ m_{n,n}^{(l)} = 0. \end{array}\right\} \tag{2.16}$$

解这些方程，得

$$m_{k,n}^{(l)} = \frac{\tilde{\delta}_n^{(k+1)}(0)}{\delta_n(0)} \quad (0 \leqslant k \leqslant n-1), \tag{2.17}$$

其中 $\tilde{\delta}_n^{(k+1)}(0)$ 是在 $\delta_n(0)$ 中用列向量 $-l(V(0)m_{0,n}^{(l-1)},\cdots,V(n-1)m_{n-1,n}^{(l-1)})'$ 代替第 $k+1$ 列后的行列式. 在(2.17)中展开两个行列

式，我们得(2.14)和(2.15)，如所得证. ∎

于是，$m_{k,n}^{(l)}$ 可以用 $m_{k,n}^{(l-1)}$ 表示. 当 $l=1$ 时的特殊情形，$G_{i,n}^{(l)}$ 不依赖于 n. 我们用 G_i 表示，则

$$G_i = \frac{V(i)}{b_i} + \sum_{k=0}^{i-1} \frac{a_i a_{i-1} \cdots a_{i-k} V(i-k-1)}{b_i b_{i-1} \cdots b_{i-k} b_{i-k-1}}. \tag{2.18}$$

而且，如果 $V \equiv 1$，则

$$m_{k,n}^{(l)} = E_k \tau^{(n)} = \sum_{i=k}^{n-1} \left\{ \frac{1}{b_i} + \sum_{j=0}^{i-1} \frac{a_i a_{i-1} \cdots a_{i-j}}{b_i b_{i-1} \cdots b_{i-j} b_{i-j-1}} \right\}. \tag{2.19}$$

公式(2.19)在[9]中首先发现.

5.3 极限情形

现在研究极限情况. 设

$$\tau(\omega) = \lim_{n\to\infty} \tau^{(n)}(\omega), \tag{3.1}$$

$$\xi(\omega) = \lim_{n\to\infty} \xi^{(n)}(\omega) = \int_0^{\tau} V[x(t)]\mathrm{d}t. \tag{3.2}$$

依单调性，这些极限存在，但可能以正概率等于 ∞. 按单调收敛定理，我们有

$$m_k = E_k \xi = \lim_{n\to\infty} m_{k,n}^{(1)} = \sum_{i=k}^{\infty} G_i. \tag{3.3}$$

对 $\lambda > 0$，令

$$\varphi_k(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \varphi_{k,n}(\lambda) = E_k(\mathrm{e}^{-\lambda\xi}). \tag{3.4}$$

定理 3.1 只有两种可能：

(A) 或者对一切整数 $k \geqslant 0$ 有 $P_k(\xi = \infty) = 1$，它成立当且仅当 $E_0 \xi = \sum_{i=0}^{\infty} G_i = \infty$；

(B) 或者对一切整数 $k \geqslant 0$ 有 $P_k(\xi < \infty) = 1$，它成立当且仅当 $E_0 \xi = \sum_{i=0}^{\infty} G_i < \infty$.

在情形(B)，

$$\varphi_k(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \frac{\delta_n^{(k+1)}(\lambda)}{\delta_n(\lambda)} \quad (k \geqslant 0), \tag{3.5}$$

是下面的方程组

$$a_k\varphi_{k-1}(\lambda) - (a_k + b_k)\varphi_k(\lambda) + b_k\varphi_{k+1}(\lambda) - \lambda V(k)\varphi_k(\lambda) = 0 \quad (k \geqslant 0). \tag{3.6}$$

的唯一的(不计常数因子)有界非平凡解.

证 因为 $\lambda > 0$，$0 \leqslant \varphi_k(\lambda) \leqslant 1$. 像在定理 2.1 中做的那样，可以证明 $\varphi_k(\lambda)(k \geqslant 0)$ 满足(3.6)

(3.6)除了平凡解外，还可以有仅仅一个线性独立解，它可以是无界的. 任意地取 $\varphi_0(\lambda) \geqslant 0$. 按[10]的引理 7，这个解有界当且仅当

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\lambda\left(\frac{V(n)}{b_n} + \frac{a_nV(n-1)}{b_nb_{n-1}} + \frac{a_na_{n-1}V(n-2)}{b_nb_{n-1}b_{n-2}} + \cdots + \frac{a_na_{n-1}\cdots a_2V(1)}{b_nb_{n-1}\cdots b_2b_1}\right) + \frac{a_na_{n-1}\cdots a_1}{b_nb_{n-1}\cdots b_1}\right] < \infty. \tag{3.7}$$

当 $V \neq 0$ 时，上面的条件等价于 $\sum_{i=0}^{\infty} G_i < \infty$.

如果 $\sum_{i=0}^{\infty} G_i = \infty$，由于$\{\varphi_k(\lambda)\}$有界，$\{\varphi_k(\lambda)\}$只能是平凡解，即，$\varphi_k(\lambda) \equiv 0(k \geqslant 0, \lambda > 0)$. 因此对一切 $k \geqslant 0$ 有 $P_k(\xi = \infty) = 1$.

如果 $\sum_{i=0}^{\infty} G_i < \infty$，$\{\varphi_k(\lambda)\}$或者是一个平凡解，或者是一个非平凡的有界解. 但它不可能是平凡解. 否则的话，如上段所述，将有 $P_k(\xi = \infty) = 1$，$E_k\xi = \sum_{i=k}^{\infty} G_i = \infty$，这与 $\sum_{i=0}^{\infty} G_i < \infty$ 矛盾. 因此，$\{\varphi_k(\lambda)\}$必定是唯一的有界非平凡解. 为求此解，注意当 $\lambda > 0$ 时 $\varphi_{k,n}(\lambda) \downarrow \varphi_k(\lambda)(n \to \infty)$，于是从(2.3)得(3.6). ∎

现在研究 ξ 的矩：

$$m_k^{(l)} = E_k[\xi]^l = \lim_{n\to\infty} m_{k,n}^{(l)}.$$

记

$$G_i^{(l)} = \lim_{n\to\infty} G_{i,n}^{(l)} = \frac{lV(i)m_i^{(l-1)}}{b_i} + \sum_{k=0}^{i-1} \frac{a_i a_{i-1}\cdots a_{i-k} lV(i-k-1)m_{i-k-1}^{(l-1)}}{b_i b_{i-1}\cdots b_{i-k} b_{i-k-1}}. \tag{3.8}$$

定理 3.2 对所有的整数 $k \geqslant 0$, $l > 0$:(A) $m_k^{(l)} = \sum_{i=k}^{\infty} G_i^{(l)}$;(B) $m_k^{(n)} \leqslant n!(m_0)^n$;(C) 所有的 $m_k^{(l)}$ 或者全是无穷的,或者全是有穷的,当且仅当 $m_0 = \sum_{i=0}^{\infty} G_i < \infty$ 时,它们是有穷的.

证 依引理 1.2,我们有

$$m_k^{(l)} = \lim_{n\to\infty} m_{k,n}^{(l)} = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=k}^{n-1} G_{i,n}^{(l)}\right) = \sum_{i=k}^{\infty} G_i^{(l)}. \tag{3.9}$$

由于 $m_0 \geqslant m_1 \geqslant m_2 \geqslant \cdots$,从(3.9)和(3.8)得

$$m_k^{(2)} \leqslant 2m_0\left(\sum_{i=k}^{\infty} G_i\right) = 2(m_0)^2.$$

设 $m_k^{(n-1)} \leqslant (n-1)!(m_0)^{(n-1)}$,从(3.9),(3.8)和 $m_0^{(n-1)} \geqslant m_1^{(n-1)} \geqslant \cdots$,得

$$m_k^{(n)} \leqslant n m_0^{(n-1)} m_k \leqslant n!(m_0)^n. \tag{3.10}$$

从(B),(A)和(3.7)立即得(C). ∎

系 3.1 分布函数 $F_k(x) = P_k(\xi(\omega) \leqslant x)$ 被其矩 $m_k^{(l)}$($l = 0, 1, 2, \cdots$;$m_k^{(0)} = 1$)唯一地决定.

证 依(3.10),当 $r < \frac{1}{m_0}$ 时,级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_k^{(n)}}{n!} r^n \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} (m_0 r)^n < \infty,$$

从而由[11]的 §15.4 中一个定理,如 $m_k < \infty$(因而 $m_0 < \infty$)则系的结论成立. 如果 $m_k = \infty$,则依定理 3.1(A)有 $P_k(\xi = \infty) = 1$. ∎

5.4 在排队论中的应用

今给出两个例子，说明我们的结果如何地在排队论中找到应用（$[m\backslash m\backslash n]$ 系统）.

例 1 设 $V(0)=1$，$V(k)=0\ (k>0)$. 则 $\xi^{(n)}$ 是在到达状态 n 以前在状态 0 的全部停留时间（用排队论中的术语，这是 n 个服务台被占用之前，总的空闲时间）. 在(2.18)中的 G_i 化为 g_i：

$$g_0=\frac{1}{b_0},\ g_i=\frac{a_ia_{i-1}\cdots a_1}{b_ib_{i-1}\cdots b_1b_0}.$$

$$\varphi_{0,n}(\lambda)=E_0\mathrm{e}^{-\lambda\xi^{(n)}}=\frac{1}{\lambda\sum\limits_{i=0}^{n-1}g_i+1}\quad (见(2.3)).$$

用拉普拉斯变换我们得：

$$P_0(\xi^{(n)}\leqslant x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x/\sum\limits_{i=0}^{n-1}g_i}, & x\geqslant 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

$$E_0\xi^{(n)}=\sum_{i=0}^{n-1}g_i\quad (见(2.14)).$$

从定理 3.1 得 $P_0(\xi<\infty)=1$ 当且仅当 $E_0\xi=\sum\limits_{i=0}^{\infty}g_i<\infty$；此时，

$$\varphi_0(\lambda)=\lim_{n\to\infty}\varphi_{0,n}(\lambda)=\frac{1}{\lambda\sum\limits_{i=0}^{\infty}g_i+1},$$

$$P_0(\xi\leqslant x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x/\sum\limits_{i=0}^{\infty}g_i}, & x\geqslant 0;\\ 0, & x<0\end{cases}.$$

例 2 如果我们关心的是 n 个服务台首次被占用之前的总时间，我们只需取 $V(k)=1(k<n)$，$V(n)=0$. 应用上面的定理，我们可求出 $\xi^{(n)}$ 的分布.

参考文献

[1] Wang Tzu-Kwen(王梓坤). Science Record. New ser., 1959, 3: 266~268

[2] Feller W. An introduction to probability theory and its applications. New York: first ed., 1951; second ed., 1957.

[3] Doob J L. Stochastic processes. New York: Wiley & sons, 1953.

[4] Юшкевич А А. Теория Вероят. и ее Прим., 1960, 2: 187~213

[5] Chung K L. Ann. of Math., 1958, 68: 126~149

[6] Хасьминский Р З. Теория Вероят. и ее Прим., 1959, 4: 332~341

[7] Дынкин Е Б. Теория Вероят. и ее Прим., 1956, 1: 38~60

[8] Wilks S S. Mathematical Statistics. New York: Wiley & Sons. 1944.

[9] Добрушин Р Л. Усп. Матем. Наук, 1952, 7: 185~191

[10] Reuter G E H. Acta Math., 1957, 97: 1~46

[11] Cramer H. Mathematical Methods of statistics. 1946.(其中第1~12章有汉译本:哈雷德·克拉美著.统计学数学方法,第一分册,郑朴、吴锦译.北京:高等教育出版社,1960.)

第6篇 生灭过程停留时间与首达时刻的分布

6.1 首达时刻与停留时间

设 $X=\{x(t), t\geqslant 0\}$ 是定义在概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的齐次可列马尔可夫过程，相空间为 $E=(0, 1, 2, \cdots)$. 如果它的转移概率 $P_{i,j}(t)$满足下列条件：当 $t\to 0$

$$
\begin{aligned}
&P_{i,i}(t)=1-(a_i+b_i)t+o(t),\\
&P_{i,i+1}(t)=b_it+o(t),\\
&P_{i,i-1}(t)=a_it+o(t),
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

$a_0=0$, $a_i>0(i>0)$, $b_i>0(i\geqslant 0)$，则称 X 为生灭过程. 不妨设 X 是可分、Borel 可测、右下半连续的强马尔可夫过程[1]. * 令

$$
\tau_n(\omega)=\inf(t: t\geqslant 0, x(t, \omega)=n),
\tag{1.2}
$$

它是过程首达状态 n 的时刻. 有时，可将 ω 略去而不写出，例如简记 $x(t, \omega)$ 为 $x(t)$ 或 x_t 等. 设已给非负函数 $V(i)$, $i\in E$, 我们的目的是要求出随机积分型泛函

$$
\xi^{(n)}=\int_0^{\tau_n}V(x_t)\mathrm{d}t
\tag{1.3}
$$

* 即第 7 篇中文献[1] 中的典范链. —— 编者

的分布. 在文献[2]中提出了一个一般的方法，其进一步的发展见文献[3—5]，但最后需解方程组而可能遇到困难. 这里我们提供另一方法，它可以求出更彻底的结果.

特别，当 $V(i)=U(i)$，而

$$U(i)=1 \quad (0\leqslant i<n);\quad U(i)=0 \quad (i\geqslant n) \tag{1.4}$$

时，记(1.3)式中的 $\xi^{(n+k)}$ 为 τ_{nk}，即

$$\tau_{nk}=\int_0^{\tau_{n+k}} U(x_t)\mathrm{d}t, \tag{1.5}$$

它是 X 在首达 $n+k$ 之前停留在 $(0,1,\cdots,n-1)$ 中的时间；而 τ_{n0} 则化为首达 n 的时刻，即(1.2)式中的 τ_n；这样，就可把首达时刻看成停留时间的特例.

在文献[6]中给出了 τ_n 的分布的积分表达式，它可从本篇的一般结果推出(见系 3.2). 当(1.5)式中积分上限为常数时，停留时间的研究见文献[7].

6.2 一般积分型泛函的分布

考虑(1.3)式中的 $\xi^{(n)}$. 以 P_k 表开始分布集中在 k 时 X 的分布，E_k 表对应的数学期望. 令

$$F_{kn}(x)=P_k(\xi^{(n)}\leqslant x), \tag{2.1}$$

$$\varphi_{k,n}(\lambda)=E_k\exp(-\lambda\xi^{(n)})=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}F_{kn}(x) \quad (\lambda>0). \tag{2.2}$$

引理 2.1

$$\varphi_{k,n}(\lambda)=h_k(\lambda)h_{k+1}(\lambda)\cdots h_{n-1}(\lambda) \quad (k<n), \tag{2.3}$$

其中 $h_m(\lambda)$ 由下列递推式给出：

$$h_0(\lambda)=b_0/[\lambda V(0)+b_0],$$

$$h_m(\lambda)=b_m/[\lambda V(m)+c_m-a_m h_{m-1}(\lambda)] \quad (m\geqslant 1), \tag{2.4}$$

这里 $c_m = a_m + b_m$.

证 令

$$h_m(\lambda) = E_m \exp(-\lambda \xi^{(m+1)}). \tag{2.5}$$

以下简记$\int_u^v V(x_t)\mathrm{d}t$为$\int_u^v$. 对停时$\tau$, 以$\mathscr{F}_\tau$表示$\tau$-前$\sigma$代数[1], 并以$\theta_\tau$表推移算子[8], 则有

$$\begin{aligned}
\varphi_{k,n}(\lambda) &= E_k \exp\left[-\lambda\left(\int_0^{\tau_{k+1}} + \int_{\tau_{k+1}}^{\tau_n}\right)\right] \\
&= E_k\left\{E_k\left[\exp\left(-\lambda\left(\int_0^{\tau_{k+1}} + \theta_{\tau_{k+1}}\int_0^{\tau_n}\right)\right) \Big| \mathscr{F}_{\tau_{k+1}}\right]\right\} \\
&= E_k \exp\left(-\lambda\int_0^{\tau_{k+1}}\right) E_{k+1}\exp\left(-\lambda\int_0^{\tau_n}\right) \\
&= h_k(\lambda)\varphi_{k+1,n}(\lambda) = h_k(\lambda)h_{k+1}(\lambda)\cdots h_{n-1}(\lambda),
\end{aligned}$$

此即为(2.3)式. 现证(2.4)式. 以β表示X的第一个跳跃点，则

$$P_m(\beta \leqslant x) = 1 - \mathrm{e}^{-c_m x} \equiv F_m(x),$$

$$E_m \mathrm{e}^{-\lambda V(m)\beta} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda V(m)x}\mathrm{d}F_m(x) = \frac{c_m}{\lambda V(m) + c_m}. \tag{2.6}$$

当$m = 0$时，(2.6)式化为(2.4)式中第一式. 其次

$$\begin{aligned}
h_m(\lambda) &= E_m\left\{E_m\left[\exp\left(-\lambda\int_0^{\tau_{m+1}}\right) \Big| \mathscr{F}_\beta\right]\right\} \\
&= E_m\left\{E_m\left[\exp\left(-\lambda\int_0^\beta - \lambda\int_\beta^{\tau_{m+1}}\right) \Big| \mathscr{F}_\beta\right]\right\} \\
&= E_m\left\{\exp\left(-\lambda\int_0^\beta\right) E_m\left[\exp\left(-\lambda\int_\beta^{\tau_{m+1}}\right) \Big| \mathscr{F}_\beta\right]\right\} \\
&= E_m\left\{\exp\left(-\lambda\int_0^\beta\right) E_{x(\beta)}\exp\left(-\lambda\int_0^{\tau_{m+1}}\right)\right\} \\
&= E_m \mathrm{e}^{-\lambda V(m)\beta}\Big[P_m(x(\beta) = m-1)E_{m-1}\exp\left(-\lambda\int_0^{\tau_{m+1}}\right) \\
&\qquad + P_m(x(\beta) = m+1)E_{m+1}\exp\left(-\lambda\int_0^{\tau_{m+1}}\right)\Big] \\
&= \frac{c_m}{\lambda V(m) + c_m}\left\{\frac{a_m}{c_m}\varphi_{m-1,m+1} + \frac{b_m}{c_m}\right\},
\end{aligned}$$

以(2.3)式代入其中的$\varphi_{m-1,m+1}$，即得(2.4)中第二式. ∎

定理 2.1

$$\varphi_{k,n}(\lambda) = b_k b_{k+1}\cdots b_{n-1}L_k(\lambda)/L_n(\lambda) \quad (k < n), \tag{2.7}$$

其中 $L_m(\lambda)$ 是次数不超过 m 的多项式，由下列递推式给出：

$$\left.\begin{aligned}&L_0(\lambda)=1,\ L_1(\lambda)=\lambda V(0)+b_0,\\&L_m(\lambda)=[\lambda V(m-1)+c_{m-1}]L_{m-1}(\lambda)-a_{m-1}b_{m-2}L_{m-2}(\lambda)\\&(m>1).\end{aligned}\right\}\tag{2.8}$$

证 由(2.4)式及归纳法，易知 $h_m(\lambda)$ 呈下形

$$h_m(\lambda)=U_{m+1}(\lambda)/L_{m+1}(\lambda),\tag{2.9}$$

$U_{m+1}(\lambda)$ 及 $L_{m+1}(\lambda)$ 分别是次数不高于 m 及 $m+1$ 次的多项式. 以此代入(2.4)式得

$$h_m(\lambda)=\frac{b_mL_m(\lambda)}{[\lambda V(m)+c_m]L_m(\lambda)-a_mU_m(\lambda)}.\tag{2.10}$$

故可取

$$\left.\begin{aligned}&U_{m+1}(\lambda)=b_mL_m(\lambda),\\&L_{m+1}(\lambda)=[\lambda V(m)+c_m]L_m(\lambda)-a_mU_m(\lambda),\end{aligned}\right\}\tag{2.11}$$

于是

$$h_m(\lambda)=b_mL_m(\lambda)/L_{m+1}(\lambda),\tag{2.12}$$

以此代入(2.3)式即得(2.7)式. 由(2.11)式得(2.8)式中后式，前二式由(2.12)及(2.4)式中第一式得出. ∎

由(2.7)式得

$$\varphi_{0,n}(\lambda)=b_0b_1\cdots b_{n-1}/L_n(\lambda),\tag{2.13}$$

$$\varphi_{k,n}(\lambda)=\varphi_{0,n}(\lambda)/\varphi_{0,k}(\lambda)\quad(k<n),\tag{2.14}$$

故不失一般性，可设开始分布集中在状态0；而要求出 $\varphi_{0,n}(\lambda)$，只要求出 $L_n(\lambda)$. 后者既可由(2.8)式推出，也可如下直接求得其系数. 设

$$L_n(\lambda)=d_{n0}+d_{n1}\lambda+\cdots+d_{nn}\lambda^n,\tag{2.15}$$

易见

$$d_{n,0}=L_n(0)=b_0b_1\cdots b_{n-1},\tag{2.16}$$

$$d_{n,n}=V(0)V(1)\cdots V(n-1),\tag{2.17}$$

$$d_{n,1}=L_n'(0)=b_0b_1\cdots b_{n-1}M_1,\tag{2.18}$$

其中 M_i 为 $\xi^{(n)}$ 的 i 级矩：

$$M_i = E_0[\xi^{(n)}]^i. \tag{2.19}$$

系 2.1

1) $d_{n,m} = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+1} \frac{M_i}{i!} d_{n,m-i} \quad (1 \leqslant m \leqslant n)$, (2.20)

2) $d_{n,m} = (-1)^{[-\frac{n}{2}]} \Delta_m \quad (1 \leqslant m \leqslant n)$, (2.21)

$[a]$ 表示不大于 a 的最大整数，而 Δ_m 是以列向量

$$d_{n,0}\left(M_1, \frac{M_2}{2!}, \frac{M_3}{3!}, \cdots, \frac{M_n}{n!} \right)'$$

代替行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ M_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ M_2/2! & -M_1 & 1 & \cdots & 0 \\ M_3/3! & -M_2/2! & M_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_{n-1}/(n-1)! & -M_{n-2}/(n-2)! & M_{n-3}/(n-3)! & \cdots & (-1)^{n+1} \end{vmatrix}$$

中第 m 列而得的行列式.

证 由(2.13)式得

$$\varphi_{0,n}(\lambda) L_n(\lambda) = b_0 b_1 \cdots b_{n-1},$$

两边微商 m 次，并简记

$\varphi^{(i)} = \varphi_{0,n}^{(i)}(0)$, $\varphi^{(0)} = \varphi_{0,n}(0)$, $L^{(i)} = L_n^{(i)}(0)$, $L^{(0)} = L_n(0)$ $(i \geqslant 1)$,

得

$$\sum_{i=0}^{m} \frac{m!}{i!(m-i)!} \varphi^{(m-i)} L^{(i)} = 0.$$

以 $\varphi^{(i)} = (-1)^i M_i$ 及 $L^{(i)} = i! d_{n,i}$ 代入，得

$$\sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i} \frac{M_{m-i}}{(m-i)!} d_{ni} = 0 \tag{2.22}$$

或

$$d_{n,m} = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{m-i+1} \frac{M_{m-i}}{(m-i)!} d_{n,i} \quad (1 \leqslant m \leqslant n),$$

此即(2.20)式.在(2.22)式中顺次令 $m=1,2,\cdots,n$,得

$$M_1 d_{n,0}=d_{n,1}$$

$$\frac{M_2}{2!}d_{n,0}=M_1 d_{n,1}-d_{n,2}$$

$$\cdots$$

$$\frac{M_n}{n!}d_{n,0}=\frac{M_{n-1}}{(n-1)!}d_{n,1}-\frac{M_{n-2}}{(n-2)!}d_{n,2}+\cdots+(-1)^{n-1}d_{n,n}$$

视 $d_{n,1},d_{n,2},\cdots,d_{n,n}$ 为未知数,用克拉麦方法解此方程组,并注意 $\Delta=(-1)^{[\frac{n}{2}]}$,即得(2.21)式. ∎

在文献[2]中已求出各级矩 $M_l=E_0[\xi^{(n)}]^l$;其实那里还求出了更一般的

$$M_{k,n}^{(l)}=E_k[\xi^{(n)}]^l \quad (M_l=M_{0,n}^{(l)}); \tag{2.23}$$

可以证明

$$M_{k,n}^{(l)}=\sum_{i=k}^{n-1}G_{in}^{(l)}, \tag{2.24}$$

而

$$G_{in}^{(l)}=\frac{lV(i)M_{i,n}^{(l-1)}}{b_i}+\sum_{k=0}^{i-1}\frac{a_i a_{i-1}\cdots a_{i-k}lV(i-k-1)M_{i-k-1,n}^{(l-1)}}{b_i b_{i-1}\cdots b_{i-k}b_{i-k-1}}, \tag{2.25}$$

$$G_{in}^{(1)}=\frac{V(i)}{b_i}+\sum_{k=0}^{i-1}\frac{a_i a_{i-1}\cdots a_{i-k}V(i-k-1)}{b_i b_{i-1}\cdots b_{i-k}b_{i-k-1}}. \tag{2.26}$$

由(2.26)式求出 $G_{in}^{(1)}$,由(2.24)式求出 $M_{k,n}^{(1)}$,再由(2.25)、(2.24)式求出 $M_{k,n}^{(2)}$,…,可见 $\xi^{(n)}$ 的高级矩,可通过低级矩来表达;故可求出一切 $M_{k,n}^{(l)}$,其中包括 M_l.

由(2.20)或(2.21)式可见,$d_{n,m}$ 的值只依赖于 $\xi^{(n)}$ 的前 m 级矩,故 $L_n(\lambda)$ 中的系数最多只依赖于 $\xi^{(n)}$ 的前 n 级矩,从而 $\xi^{(n)}$ 的分布被其最多前 n 级矩所唯一决定.精确些,如 $V(i)(0\leqslant i<n)$ 中恰有 m 个值大于0,则 $L_n(\lambda)$ 之次数为 m,因此 $F_{0,n}(x)$ 被其前

m 级矩所唯一决定.

(2.20) 式建立了对同一多项式 $L_n(\lambda)$ 中诸系数间的关系. 对不同的 n, 也可找到类似的公式. 为此, 由(2.7) 式

$$\varphi_{k,n}(\lambda)L_n(\lambda) = b_k b_{k+1}\cdots b_{n-1}L_k(\lambda) \quad (k < n),$$

然后重复系 2.1 的证明中的推导, 得

$$d_{n,m} = \sum_{i=1}^{m} \frac{(-1)^{i+1}}{i!} M_{k,n}^{(i)} d_{n,m-i} + b_k b_{k+1}\cdots b_{n-1} d_{km}$$

$$(1 \leqslant m \leqslant n), \ (d_{k,m} = 0, \text{如 } k < m). \tag{2.27}$$

特别, 当 $k = 0$ 时, 此式化为(2.20) 式.

6.3 停留时间与首达时间的分布

今固定状态 n 及 $n+k$, 考虑由(1.5) 式定义的停留时间 $\tau_{n,k}$, 对应于它的多项式记为 $S_m(\lambda)$. 由(1.4) 和(2.8) 式, 后者满足关系式

$$S_0(\lambda) = 1, \ S_1(\lambda) = \lambda + b_0, \tag{3.1}$$

$$S_i(\lambda) = (\lambda + c_{i-1})S_{i-1}(\lambda) - a_{i-1}b_{i-2}S_{i-2}(\lambda) \ (1 < i \leqslant n), \tag{3.2}$$

$$S_{n+i}(\lambda) = c_{n+i-1}S_{n+i-1}(\lambda) - a_{n-i-1}b_{n+i-2}S_{n+i-2}(\lambda)$$

$$(1 \leqslant i \leqslant k). \tag{3.3}$$

引理 3.1 $S_m(\lambda) = 0 \ (1 \leqslant m \leqslant n+k)$ 的根皆为负数, 而且都是单根.

证 此结论对满足(3.1)、(3.2) 式的多项式 $S_m(\lambda)(m \leqslant n)$ 是已知的(见[9]), 故只要对 $n < m \leqslant n+k$ 证明. 考虑

$$\mathscr{S}_l(\lambda) = \frac{S_l(\lambda)}{b_0 b_1 \cdots b_{l-1}} = \frac{1}{\varphi_{0,l}(\lambda)} \quad (1 \leqslant l \leqslant n+k), \tag{3.4}$$

显然, $\mathscr{S}_l(\lambda)$ 与 $S_l(\lambda)$ 有相同的零点, 但由(2.16) 式, $\mathscr{S}_l(\lambda)$ 的常

数项 $\mathscr{S}_i(0)=1$. 由(3.3)式得

$$\mathscr{S}_{n+i}(\lambda)=\frac{c_{n+i-1}}{b_{n+i-1}}\mathscr{S}_{n+i-1}(\lambda)-\frac{a_{n+i-1}}{b_{n+i-1}}\mathscr{S}_{n+i-2}(\lambda)\ (1\leqslant i\leqslant k), \tag{3.5}$$

以下略去 λ 而不写出. 由上式得

$$\begin{aligned}\mathscr{S}_{n+i}-\mathscr{S}_{n+i-1}&=\frac{a_{n+i-1}}{b_{n+i-1}}(\mathscr{S}_{n+i-1}-\mathscr{S}_{n+i-2})=\cdots\\&=\frac{a_{n+i-1}a_{n+i-2}\cdots a_n}{b_{n+i-1}b_{n+i-2}\cdots b_n}(\mathscr{S}_n-\mathscr{S}_{n-1}).\end{aligned}$$

双方对 $1\leqslant i\leqslant k$ 求和，得

$$\mathscr{S}_{n+k}=\mathscr{S}_n+A_{nk}(\mathscr{S}_n-\mathscr{S}_{n-1}), \tag{3.6}$$

$$A_{nk}=\sum_{j=0}^{k-1}\frac{a_na_{n+1}\cdots a_{n+j}}{b_nb_{n+1}\cdots b_{n+j}}>0.$$

对此固定的 n，由(3.1)、(3.2)式可见 $\mathscr{S}_n$ 和 $\mathscr{S}_{n-1}$ 分别是 n 与 $n-1$ 次多项式. 由(2.17)式，它们的最高次项的系数皆为正，故 $\mathscr{S}_{n+k}$ 也是 n 次多项式. 以 $\mu_i^{(l)}$ 记 $\mathscr{S}_l(\lambda)$ 的零点. 已知[9]

$$0>\mu_1^{(n)}>\mu_1^{(n-1)}>\mu_2^{(n)}>\mu_2^{(n-1)}>\cdots>\mu_{n-1}^{(n-1)}>\mu_n^{(n)}.$$

显然

$$\mathscr{S}_{n+k}(\mu_i^{(n)})=-A_{nk}\mathscr{S}_{n-1}(\mu_i^{(n)}).$$

由于 $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\mathscr{S}_{n-1}(\lambda)=\infty$，而且 $\mu_1^{(n)}>\mu_1^{(n-1)}$，故 $\mathscr{S}_{n-1}(\mu_1^{(n)})>0$ 从而 $\mathscr{S}_{n+k}(\mu_1^{(n)})<0$. 同样推理知 $\mathscr{S}_{n+k}(\mu_i^{(n)})$ 与 $(-1)^i$ 同号，故 $\mathscr{S}_{n+k}(\lambda)$ 在 $(\mu_{i+1}^{(n)},\mu_i^{(n)})$ 中有零点，$i=1,2,\cdots,n-1$. 既然 $\mathscr{S}_{n+k}(0)=1$，可见另一零点在 $(\mu_1^{(n)},0)$ 中. 于是

$$0>\mu_1^{(n+k)}>\mu_1^{(n)}>\mu_2^{(n+k)}>\mu_2^{(n)}>\cdots>\mu_n^{(n+k)}>\mu_n^{(n)}. \tag{3.7}$$

∎

注 3.1 如将(3.6)式中的 A_{nk} 换为任一正数，易见(3.7)式仍成立.

为方便计，令 $\lambda_i^{(m)}=-\mu_i^{(m)}>0$. 由引理 3.1

$$S_m(\lambda) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{m} (\lambda + \lambda_i^{(m)}) \ (m \leqslant n), \\ \prod_{i=1}^{n} (\lambda + \lambda_i^{(m)}) \ (n < m \leqslant n + k). \end{cases} \quad (3.8)$$

其中 $0 < \lambda_1^{(m)} < \lambda_2^{(m)} < \cdots$

令

$$F_{mnk}(x) = P_m(\tau_{n,k} \leqslant x).$$

定理 3.1 自 $m(m < n)$ 出发，停留时间 $\tau_{n,k}$ 的分布函数 $F_{mnk}(x)$ 是混合指数型的，其密度为

$$f_{mnk}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_m b_{m+1} \cdots b_{n+k-1} S_m(-\lambda_i^{(n+k)})}{S'_{n+k}(-\lambda_i^{(n+k)})} e^{-\lambda_i^{(n+k)} x},$$

(3.9)

其中 $S_i(\lambda)(i = m, n + k)$ 由(3.1)—(3.3)式给出，S'_{n+k} 表示 S_{n+k} 的导数，

$$S'_{n+k}(-\lambda_i^{(n+k)}) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (\lambda_j^{(n+k)} - \lambda_i^{(n+k)}). \quad (3.10)$$

证 由(2.7)式

$$\varphi_{m,n+k}(\lambda) = E_m e^{-\lambda \tau_{n,k}} = \frac{b_m b_{m+1} \cdots b_{n+k-1} S_m(\lambda)}{S_{n+k}(\lambda)}.$$

以(3.8)式代人并取反拉普拉斯变换即得本定理. ∎

由于首达 n 的时刻 $\tau_n = \tau_{n,0}$，故有

系 3.1 自 $m(m < n)$ 出发，首达 n 的时刻 τ_n 有分布密度为

$$f_{mn}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_m b_{m+1} \cdots b_{n-1} S_m(-\lambda_i^{(n)})}{S'_n(-\lambda_i^{(n)})} e^{-\lambda_i^{(n)} x}, \quad (3.11)$$

其中 $S_i(\lambda)(i = m, n)$ 由(3.1)、(3.2)式给出.

下面简单讨论停留在高水平状态的时间. 取

$$h(i) = 0 \quad (0 \leqslant i < n); \ h(i) = 1 \quad (i \geqslant n), \quad (3.12)$$

则

$$\zeta_{nk} = \int_0^{\tau_{n+k}} h(x_t) dt$$

是首达 $n + k$ 之前，停留在$(n, n + 1, \cdots, n + k - 1)$中的时间. 由(2.8)式，它所对应的多项式 $H_m(\lambda)$ 应满足

$$H_0(\lambda) = 1,\ H_i(\lambda) = b_0 b_1 \cdots b_{i-1} \quad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

$$H_{n+1}(\lambda) = b_0 b_1 \cdots b_{n-1}(\lambda + b_n),$$

$$H_{n+i}(\lambda) = (\lambda + c_{n+i-1}) H_{n+i-1}(\lambda)$$

$$\qquad - a_{n+i-1} b_{n+i-2} H_{n+i-2}(\lambda) \quad (1 \leqslant i \leqslant k).$$

可见 $H_i(\lambda)(1 \leqslant i \leqslant n)$ 是常数，而 $H_{n+i}(\lambda)$ 是 λ 的 i 次多项式. 后者对 λ 的关系正与(3.2)式类似，故它有 i 个负单零点. 由(2.7)式

$$E_m \exp(-\lambda \zeta_{nk}) = \frac{b_m b_{m+1} \cdots b_{n+k-1} H_m(\lambda)}{H_{n+k}(\lambda)} \quad (0 \leqslant m < n+k),$$

因此，$P_m(\zeta_{nk} \leqslant x)$ 有密度为

$$h_{mnk}(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{b_m b_{m+1} \cdots b_{n+k-1} H_m(-\gamma_i^{(n+k)})}{H'_{n+k}(-\gamma_i^{(n+k)})} e^{-\gamma_i^{(n+k)} x}$$

其中 $-\gamma_i^{(n+k)}$ 是 $H_{n+k}(\lambda)$ 的零点，$i = 1, \cdots, k$.

6.4 极限分布

引进

$$z = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_1 a_2 \cdots a_k}{b_1 b_2 \cdots b_k}. \tag{4.1}$$

可以证明[10]：当 $z = \infty$ 时，X 的一切状态是常返的*. 考虑(4.4)式中的多项式 $\mathscr{S}_i(\lambda)$，设

$$\mathscr{S}_n(\lambda) = 1 + c_{n1}\lambda + c_{n2}\lambda^2 + \cdots + c_{nn}\lambda^n, \tag{4.2}$$

由(2.20)及(2.23)—(2.25)式知：

$$c_{n1} = E_0 \tau_n = E_0 \tau_{n0} = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{b_i} + \sum_{j=0}^{i-1} \frac{a_i a_{i-1} \cdots a_{i-j}}{b_i b_{i-1} \cdots b_{i-j} b_{i-j-1}} \right), \tag{4.3}$$

一般地

---

* 还可证明：X 中的嵌入马尔可夫链（离散时间参数）的一切状态常返的充要条件是 $z = \infty$.

$$E_0\tau_{nk} = \sum_{i=0}^{n-k-1}\left(\frac{U(i)}{b_i} + \sum_{j=0}^{i-1}\frac{a_i a_{i-1}\cdots a_{i-j}U(i-j-1)}{b_i b_{i-1}\cdots b_{i-j}b_{i-j-1}}\right). \tag{4.4}$$

$U(i)$ 由(1.4)式定义. 令

$$A_n = \lim_{k\to\infty} A_{nk} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{a_n a_{n+1}\cdots a_{n+j}}{b_n b_{n+1}\cdots b_{n+j}}, \tag{4.5}$$

显然

$$A_n = \left(z - 1 - \sum_{i=1}^{n-1}\frac{a_1 a_2\cdots a_i}{b_1 b_2\cdots b_i}\right)\frac{b_1 b_2\cdots b_{n-1}}{a_1 a_2\cdots a_{n-1}}.$$

因此, $A_n < \infty$ 等价于 $z < \infty$.

试研究当 $k\to\infty$ 时, $P_0\left(\frac{\tau_{n,k}}{E_0\tau_{n,k}} \leqslant x\right)$ 的极限.

定理 4.1 只有两种可能:

1) 如 $z = \infty$, 则

$$\lim_{k\to\infty} P_0\left(\frac{\tau_{n,k}}{E_0\tau_{n,k}} \leqslant x\right) = 1 - e^{-x}. \tag{4.6}$$

2) 如 $z < \infty$, 则

$$\lim_{k\to\infty} P_0\left(\frac{\tau_{n,k}}{E_0\tau_{n,k}} \leqslant x\right) = \int_0^x \sum_{j=1}^{n}\frac{B_n}{Q_n'(-\beta_j^{(n)})}e^{-\beta_j^{(n)}t}\,dt. \tag{4.7}$$

这里

$$\beta_j^{(n)} = d_n\alpha_j^{(n)} > 0,\ d_n = A_n(c_{n1} - c_{n-1,1}) + c_{n1} > 0,$$

而 $-\alpha_j^{(n)}(j = 1, 2, \cdots, n)$ 是

$$\mathscr{S}(\lambda) \equiv 1 + \sum_{i=1}^{n}[A_n(c_{ni} - c_{n-1,i}) + c_{ni}]\lambda^i = 0$$

的 n 个互异的根($c_{n-1,n} = 0$). 又

$$B_n = \frac{(d_n)^n}{(A_n + 1)c_{nn}},\qquad Q_n(\lambda) = B_n\mathscr{S}\left(\frac{\lambda}{d_n}\right).$$

证 由(3.6), (4.2)式

$$\mathscr{S}_{n+k}(\lambda) = 1 + \sum_{i=1}^{n}[A_{nk}(c_{ni} - c_{n-1,i}) + c_{ni}]\lambda^i, \tag{4.8}$$

由(3.4)式

$$E_0 e^{-\lambda\tau_{n,k}} \equiv \varphi_{0,n+k}(\lambda) = \frac{1}{\mathscr{S}_{n+k}(\lambda)},$$

$$E_0\tau_{n,k} = -\varphi'_{0,n+k}(0) = A_{nk}(c_{n1} - c_{n-1,1}) + c_{n1},$$

由此及(4.8)式，得

$$E_0\exp\left(-\lambda\frac{\tau_{n,k}}{E_0\tau_{n,k}}\right) = 1/\mathscr{S}_{n+k}\left(\frac{\lambda}{E_0\tau_{n,k}}\right)$$

$$= 1\Big/\left\{1 + \lambda + \sum_{i=2}^{n}\frac{A_{nk}(c_{ni} - c_{n-1,i}) + c_{ni}}{[A_{nk}(c_{n1} - c_{n-1,1}) + c_{n1}]^i}\lambda^i\right\}. \quad (4.9)$$

1) 设 $z = \infty$，因而 $\lim\limits_{k\to\infty}A_{nk} = \infty$. 对任意 $\lambda > 0$，

$$\left|\mathscr{S}_{n+k}\left(\frac{\lambda}{E_0\tau_{n,k}}\right) - 1 - \lambda\right|$$

$$\leqslant \sum_{i=2}^{n}\left|\frac{A_{nk}(c_{ni} - c_{n-1,i}) + c_{ni}}{[A_{nk}(c_{n1} - c_{n-1,1}) + c_{n1}]^i}\lambda^i\right|,$$

当 $k\to\infty$ 时，右方趋于 0，故

$$\lim_{k\to\infty}E_0\exp\left(-\lambda\frac{\tau_{n,k}}{E_0\tau_{n,k}}\right) = \frac{1}{1+\lambda}.$$

此等价于(4.6)式.

2) 设 $z < \infty$，因而 $A_n = \lim\limits_{k\to\infty}A_{nk} < \infty$. 由(3.6)，(4.8)式得

$$\mathscr{S}(\lambda) = \lim_{k\to\infty}\mathscr{S}_{n+k}(\lambda) = \mathscr{S}_n(\lambda) + A_n(\mathscr{S}_n(\lambda) - \mathscr{S}_{n-1}(\lambda))$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^{n}[A_n(c_{ni} - c_{n-1,i}) + c_{ni}]\lambda^i,$$

由引理 3.1 后面的注，$\mathscr{S}(\lambda) = 0$ 有 n 个互异的负根，记为 $-\alpha_j^{(n)}$，$j = 1, 2, \cdots, n$. 因 $c_{n1} = E_0\tau_n$，故

$$d_n = A_n(c_{n1} - c_{n-1,1}) + c_{n1} > 0.$$

设 $\mathscr{S}\left(\frac{\lambda}{d_n}\right) = 0$ 的根为 $-\beta_j^{(n)}$，显然 $\beta_j^{(n)} = d_n\alpha_j^{(n)} > 0$. 根据(4.9)式

$$\lim_{k\to\infty}E_0\exp\left(-\lambda\frac{\tau_{nk}}{E_0\tau_{nk}}\right)$$

$$= \left\{1 + \sum_{i=1}^{n}[A_n(c_{ni} - c_{n-1,i}) + c_{ni}]\left(\frac{\lambda}{d_n}\right)^i\right\}^{-1}$$

$$= \left[\mathscr{S}\left(\frac{\lambda}{d_n} \right) \right]^{-1} = \frac{B_n}{B_n \mathscr{S}\left(\frac{\lambda}{d_n} \right)} = \frac{B_n}{Q_n(\lambda)},$$

$\mathscr{S}\left(\frac{\lambda}{d_n} \right)$ 中，λ^n 的系数为 $(A_n + 1)c_{nn}/(d_n)^n = \frac{1}{B_n}$，故 n 次多项式 $Q_n(\lambda)$ 中，λ^n 的系数为 1. 又因

$$\lim_{\lambda \to 0} \mathscr{S}\left(\frac{\lambda}{d_n} \right) = 1, \text{故} \quad \lim_{\lambda \to 0} \frac{B_n}{Q_n(\lambda)} = 1.$$

由拉普拉斯变换的连续性定理［11，第 431 页］及反演公式即得证（4.7）式. ∎

注意，由定理 4.1 可见：当 $z=\infty$ 时，(4.6) 式中的极限分布不依赖于停留集 $(0, 1, \cdots, n-1)$ 的状态数 n，而当 $z<\infty$ 时则不然.

参考文献

［1］ Chung K L. Markov Chains with stationary transition probabilities. Springer-Verlag，1st ver.，1960；2nd ver.，1967.

［2］ Wang Tzu-kwen（王梓坤）. On distributions of functionals of birth and death processes and their applications in the theory of queues. Scientia Sinica，1961，X：160～170

［3］ 吴立德. 数学学报，1963，13(1)：86～93

［4］ 杨向群. 可列马氏过程的积分型泛函和双边生灭过程的边界性质. 数学进展，1964，7(4)：397～424

［5］ 侯振挺、郭青峰. 齐次可列马尔可夫过程. 北京：科学出版社，1978.

［6］ Soloiev A D. Proceedings of Sixth Berkeley Symp. on Math. Statistics and probability. 1972，71～86

［7］ Karlin S.，Mcgregor J L. Proceedings of fourth Berkeley symp. on Math. Statistics and probability. 1961，249～272

［8］ Дынкин Е. Б. Марковские процессы. Москва：Госуд. издат. физико-Матем. Литер.（英译本见第 4 篇参考文献［6］）1963.

[9] Ledermann W., Reuter G E H. Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, 1954, 246:321～369

[10] 王梓坤. 数学进展, 1962, 5(2):137～179.

[11] Feller W. An introduction to probability theory and its applications. vol. 2. Wiley & Sons, 1971.

第 7 篇 生灭过程理论的若干新进展

7.1 定义与数字特征

设 $X=\{x_t(\omega), t\geqslant 0\}(\omega\in\Omega)$为定义在概率空间$(\Omega,\mathscr{B},P)$上的齐次可列马氏过程,状态空间 E 为全体非负整数,转移概率矩阵为$P(t)=(P_{ij}(t)), i,j\in E$. 称它为生灭过程,如果当 $t\to 0$ 时,有

$$\begin{cases} P_{ii+1}(t)=b_it+o(t), \\ P_{ii-1}(t)=a_it+o(t), \\ P_{ii}(t)=1-(a_i+b_i)t+o(t), \end{cases} \tag{1.1}$$

其中常数 $a_0\geqslant 0$, $a_i>0$ $(i>0)$, $b_i>0$ $(i\geqslant 0)$. 令 $c_i=a_i+b_i$, 称矩阵

$$Q=\begin{bmatrix} -c_0 & b_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_1 & -c_1 & b_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n & -c_n & b_n & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

为过程的密度矩阵. 以下无特别声明时,恒设 $a_0=0$, 这时状态 0 为反射壁. 还可以假定 X 为典范过程,即为可分、Borel 可测、右下半连续的强马氏过程. 由 (1.1) 知,如质点沿过程的轨道而运

动、自状态 i 出发，下一步只能转移到 $i-1$ 与 $i+1$，概率分别为 a_i/c_i 与 b_i/c_i.

生灭过程在物理、生物、医学、运筹学与工程技术等方面有许多应用；从理论上看，它的结构比较简单，所以在某些问题上可以取得彻底的结果，因而可以作为一般理论的先导. 例如，关于间断型马氏过程的爆发问题（即第一个飞跃点有穷），就是从纯生过程开始研究的. 关于生灭过程生动而有趣的介绍见 [13]，建立在测度论上的系统论述见 [1]. 本篇的目的在于综述生灭过程理论的一些新进展，侧重于国内所得的部分结果.

利用 a_i、b_i，引进下列数字特征：

$$m_i = \frac{1}{b_i} + \sum_{k=0}^{i-1} \frac{a_i a_{i-1} \cdots a_{i-k}}{b_i b_{i-1} \cdots b_{i-k} b_{i-k-1}} \quad \left(m_0 = \frac{1}{b_0},\ i \geqslant 0 \right). \tag{1.3}$$

$$e_i = \frac{1}{a_i} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_i b_{i+1} \cdots b_{i+k}}{a_i b_{i+1} \cdots a_{i-k} a_{i+k+1}} \quad (i > 0). \tag{1.4}$$

$$R = \sum_{i=0}^{\infty} m_i, \qquad S = \sum_{i=0}^{\infty} e_i, \tag{1.5}$$

以及

$$z_0 = 0,\ z_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_1 a_2 \cdots a_k}{b_1 b_2 \cdots b_k},\ z_n \uparrow z. \tag{1.6}$$

它们有下列概率意义. 以 η_n 表示过程首达状态 n 的时间，即

$$\eta_n(\omega) = \inf(t: t > 0,\ x_t(\omega) = n), \tag{1.7}$$

我们约定空集的下确界为 ∞. 以 P_i 表示自 i 出发由 $P(t)$ 所产生的概率，它对应的数学期望记为 E_i. 则有 $m_i = E_i \eta_{i+1}$，$R = E_0 \eta$，($\eta = \lim\limits_{n \to \infty} \eta_n$). 这说明 m_i 是自 i 出发，首达 $i+1$ 的平均时间，而 R 则是自 0 出发，首达附加状态 ∞ 的平均时间. 至于 e_i 与 S 则恰好有相反的意义，它们可分别直观地理解为：当 ∞ 为反射壁时，自 i 到 $i-1$ 与自 ∞ 到 0 的平均时间.

以 $p_k(m, n)$ 表示自 k 出发，在到达 n 之前先到达 m 的概率，则当 $m < k < n$ 时，有

$$p_k(m,n)=\frac{z_n-z_k}{z_n-z_m},\qquad p_k(n,m)=\frac{z_k-z_m}{z_n-z_m},\quad(1.8)$$

以 $q_k(m)$ 表示自 k 出发，经有穷($\geqslant 1$)次跳跃而到达 m 的概率，则

$$q_k(m)=\begin{cases}(z-z_k)/(z-z_m), & k>m;\\ 1, & k<m;\\ a_k/c_k+b_k(z-z_{k+1})/c_k(z-z_k), & k=m.\end{cases}\tag{1.9}$$

因此，当且只当 $z=\infty$ 时，嵌入马氏链的一切状态都是常返的.

7.2 积分型泛函的分布

许多实际问题(例如停留时间与首达时间等)可以化为下列形式：设 $V(i)\geqslant 0$ 为定义在 E 上的不恒为 0 的函数，考虑随机积分型泛函

$$\xi^{(n)}(\omega)=\int_0^{\eta_n(\omega)}V[x_t(\omega)]\mathrm{d}t,\tag{2.1}$$

试求 $\xi^{(n)}$ 的分布 $F_{kn}(x)=P_k(\xi^{(n)}\leqslant x)$. 为此，我们研究其拉普拉斯变换：对 $\lambda>0$，令

$$\varphi_{kn}(\lambda)=E_k\exp(-\lambda\xi^{(n)})=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}F_{nk}(x),\tag{2.2}$$

它可以求出如下：

定理 2.1 设 $k<n$，有

$$\varphi_{kn}(\lambda)=b_kb_{k+1}\cdots b_{n-1}L_k(\lambda)/L_n(\lambda),\tag{2.3}$$

其中 $L_m(\lambda)$ 是次数不超过 m 的多项式，由下列递推式给出：

$$\begin{cases}L_0(\lambda)=1,\\ L_1(\lambda)=\lambda V(0)+b_0,\\ L_m(\lambda)=[\lambda V(m-1)+c_{m-1}]L_{m-1}(\lambda)-a_{m-1}b_{m-2}L_{m-2}(\lambda)\\ (m>1).\end{cases}\tag{2.4}$$

在(2.1)中令 $n\to\infty$，以 P_k- 概率 1，显然有

$$\xi^{(k)} < \xi^{(k+1)} < \cdots, \xi^{(n)} \uparrow \xi = \int_0^{\eta} V(x_t)\mathrm{d}t,$$

关于 ξ 的有穷性，有下列零壹律：

定理 2.2 $P_k(\xi < \infty) = 0$ 对一切 k，或 $= 1$ 对一切 k，视 $E_0\xi = \infty$ 或 $E_0\xi < \infty$ 而定.

至于 ξ 的分布的拉普拉斯变换，可证明它是一代数方程组的唯一非平凡有界解[1, 3]；在某些情况下，可以由此找到此分布的表达式. 例如，当 $V(0) = 1, V(i) = 0\ (i > 0)$ 时，ξ 化为首达 ∞ 以前在状态 0 的停留时间，这时

$$P_0(\xi \leqslant x) = \begin{cases} 1 - \exp\left(-x \Big/ \sum_{i=0}^{\infty} g_i\right), & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

其中

$$g_0 = 1/b_0,\ g_i = a_i a_{i-1} \cdots a_1 / b_i b_{i-1} \cdots b_1 b_0;$$

又
$$E_0\xi = \sum_{i=0}^{\infty} g_i.$$

现在将此例一般化. 考虑 $V(i) = U(i)$，而

$$U(i) = 1 \quad (0 \leqslant i < n); \qquad U(i) = 0 \quad (i \geqslant n). \tag{2.6}$$

记

$$J_{nk} = \int_0^{\eta_{n+k}} U(x_t)\mathrm{d}t, \tag{2.7}$$

它是(2.1) 当 $V = U$ 时的特例. J_{nk} 是首达 $n + k$ 之前，在诸状态 $(0, 1, \cdots, n-1)$ 中的停留时间，而 J_{n0} 则化为首达 n 的时间，即 (1.7) 中的 η_n. 它们的分布皆可求出如下. 将(2.4) 中的 V 改为 U，得一组多项式 $S_m(\lambda)$：

$$S_0(\lambda) = 1,$$
$$S_1(\lambda) = \lambda + b_0, \tag{2.8}$$
$$S_i(\lambda) = (\lambda + c_{i-1})S_{i-1}(\lambda) - a_{i-1}b_{i-2}S_{i-2}(\lambda)$$
$$(1 < i \leqslant n), \tag{2.9}$$
$$S_{n+i}(\lambda) = c_{n+i-1}S_{n+i-1}(\lambda) - a_{n+i-1}b_{n+i-2}S_{n+i-2}(\lambda)$$

$$(1 \leqslant i \leqslant k), \tag{2.10}$$

可以证明：$S_m(\lambda) = 0$ 的根 $\lambda_i^{(m)}$ 皆为负数，而且都是单根. 从而有分解式

$$S_m(\lambda) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{m} (\lambda + \lambda_i^{(m)}), & m \leqslant n; \\ \prod_{i=1}^{n} (\lambda + \lambda_i^{(m)}), & n < m \leqslant n + k. \end{cases} \tag{2.11}$$

其中 $0 < \lambda_1^{(m)} < \lambda_2^{(m)} < \cdots$.

自 m 出发，停留时间 J_{nk} 的分布函数记为

$$F_{mnk}(x) = P_m(J_{nk} \leqslant x),$$

因而首达 n 的时间 η_n 的分布函数为 $F_{mn0}(x)$.

定理 2.3 自 $m(m < n)$ 出发，停留时间 J_{nk} 的分布函数 $F_{mnk}(x)$ 是混合指数型的，有密度为

$$f_{mnk}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_m b_{m+1} \cdots b_{n+k-1} S_m(-\lambda_i^{(n+k)})}{S'_{n+k}(-\lambda_i^{(n+k)})} \mathrm{e}^{-\lambda_i^{(n+k)} x}, \tag{2.12}$$

其中 $S_i(\lambda)(i = m, n + k)$ 由(2.8)—(2.10)给出，S' 表 S 的导数，

$$S'_{n+k}(-\lambda_i^{(n+k)}) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (\lambda_j^{(n+k)} - \lambda_i^{(n+k)}). \tag{2.13}$$

特别，首达 n 的时间 η_n 有密度为 $f_{mn0}(x)$.

下面讨论当 $k \to \infty$ 时，$P_0\left(\frac{J_{nk}}{E_0 J_{nk}} \leqslant x\right)$ 的极限. 结果发现，极限分布依赖于(1.6)中的 z 是否无穷. 当 $z = \infty$ 时，嵌入马氏链(从而过程 X 本身)是常返的.

定理 2.4 只有两种可能，此极限分布或者是指数型的，或者是混合指数的：

如 $z = \infty$，则

$$\lim_{k \to \infty} P_0\left(\frac{J_{nk}}{E_0 J_{nk}} \leqslant x\right) = 1 - \mathrm{e}^{-x}. \tag{2.14}$$

如 $z<\infty$，则

$$\lim_{k\to\infty}P_0\left(\frac{J_{nk}}{E_0J_{nk}}\leqslant x\right)=\int_0^x\sum_{j=1}^{n}A_{nj}e^{-a_{nj}t}dt, \tag{2.15}$$

其中 A_{nj}、$a_{nj}>0$ 是常数，它们可以通过密度矩阵中的元 a_i、b_i 表达出来. 参看 [2].

由此可知，如 $z=\infty$，极限分布不依赖于停留集（0，1，…$n-1$）中的元数 n，而当 $z<\infty$时则反是.

以上诸定理的证明见 [1，2，3]，有关问题也见 [14].

至此我们着重讨论了停留时间. 关于一般的由（2.1）定义的 $\xi^{(n)}$ 的深入研究见 [5]，那里发现：自 m 出发（$m<n$），$\xi^{(n)}$ 的分布仍是混合指数型的；此外还证明了极限分布必为无穷可分，即如对适当选择的常数 $B_n>0$ 及 a_n，如在弱收敛下有

$$\lim_{n\to\infty}P_0\left(\frac{\xi^{(n)}-a_n}{B_n}\leqslant x\right)=G_0(x),$$

则概率分布函数 $G_0(x)$ 是无穷可分的. 在 [5] 中还得到了下列极限定理：

定理 2.5

（1）若 $\frac{a_n}{b_n}\to 0$，$\frac{V(n)}{b_n}\to c(n\to\infty)$，则强大数定律成立，即

$$P_0\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\xi^{(n)}-E_0\xi^{(n)}}{n}=0\right)=1;$$

（2）在上述条件下，如补设 $c>0$，则中心极限定理成立，即

$$\lim_{n\to\infty}P_0\left\{\frac{\xi^{(n)}-E_0\xi^{(n)}}{\sqrt{D_0(\xi^{(n)})}}\leqslant x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}dt.$$

以上都假定了开始状态 $m<n$. 如 $m>n$，则由于在首达 n 以前缺乏像 0 那样的反射壁而发生新困难，葛余博对此作了研究.

7.3 构造问题

沿生灭过程轨道的运动可如下描述：设质点自 $i\ (=x_0)$ 出发，在 i 停留一段时间 τ_1，变量 τ_1 有参数为 $c_i\ (=a_i+b_i)$ 的指数分布，接着跳跃到状态 $x(\tau_1)$，

$$P_i(x(\tau_1)=i+1)=\frac{b_i}{c_i},\quad P_i(x(\tau_1)=i-1)=\frac{a_i}{c_i},$$

然后在 $x(\tau_1)$ 又停留一段时间，在 τ_2 时再作第二次跳跃，如此继续. 于是得一列跳跃点

$$0<\tau_1<\tau_2<\cdots,\ \tau_n\uparrow\tau^1\leqslant\infty,$$

称 τ^1 为第一个飞跃点. 易见 $P_i(\tau^1=\eta)=1$；而且只有两种可能，对全体 i 有 $P_i(\tau^1=\infty)=1$ 或 0，视 $R=\infty$ 或 $R<\infty$ 而定. 这是 Добрушин 证明的，可看成定理 2.2 当 $V(i)\equiv1$ 时的特例.

如果 $R=\infty$，过程的轨道以概率 1 是阶梯函数；这时过程的概率性质包括 $P(t)$ 完全由密度矩阵 Q 决定. 如果 $R<\infty$，则 Q 只决定过程在 τ^1 以前的转移性质，它不能回答在 $[\tau^1,\tau^1+\varepsilon)$ 中质点如何运动；为此必须再引进一些特征数来刻画在这段时间内质点的行为. 由于 $P_i(x(\tau_n)\to\infty)=1$，所以这些特征数的作用在于刻画质点在到达附加状态 ∞ 后，如何返回到 E 中来. 当它回到 E 中某状态 i 后，它又像上面所述的那样，继续前进.

所谓构造问题（或者 Q 问题），是说预先给出形如(1.2)的矩阵 Q 后，要求出一切生灭过程 X，其密度矩阵为 Q. 我们称这种过程为 Q- 过程. 或者，用分析的话说，要求出一切转移概率矩阵 $P(t)$，它们满足(1.1). 用微分方程的术语，这相当于要求出

$$P'(t)=QP(t),\ P(0)=I \tag{3.1}$$

的全体解 $P(t)$. 这里 I 为恒等矩阵(δ_{ij}).

如上述，如用 Q 中的元按(1.3)(1.5)作出的 $R=\infty$，则解是唯一的，此解即通常所谓的最小过程. 以下总设 $R<\infty$，可以用

概率的方法构造出全部 Q 过程. 结果发现：任一 Q 过程，或者是 Doob 过程，或者是一列 Doob 过程的极限.

所谓 Doob 过程的概率结构是：任取集中在 E 上的概率分布 $\{d_i\}$, $d_i \geqslant 0$, $\sum_{i=0}^{\infty} d_i = 1$. 令 $x(\tau^1)$ 的分布为 $\{d_i\}$，于是当质点到达 ∞ 后，便以概率 d_i 立即回到状态 i. Doob 过程由 Q 及 $\{d_i\}$ 决定，故记它为 (Q, d) 过程.

设 $\{x_t(\omega), t \geqslant 0\}$ 为任一 Q 过程，令

$$\beta_1^{(n)}(\omega) = \inf(t : t \geqslant \tau^1(\omega), x_t(\omega) \leqslant n),$$

$$v_i^{(n)} = P(x(\beta_1^{(n)}) = i).$$

现在定义此过程的一列新特征数 $\{p, q, r_n, n \geqslant 0\}$ 如下：可以证明，存在极限

$$p = \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{i=0}^{n-1} v_i^{(n)} c_{i0}}{\sum_{i=0}^{n} v_i^{(n)} c_{i0}}, \qquad q = \lim_{n \to \infty} \frac{v_n^{(n)} c_{n0}}{\sum_{i=0}^{n} v_i^{(n)} c_{i0}},$$

其中 $c_{m0} = (z - z_m)/z = q_m(0)$ ［见(1.9)式］.

如果一切 $v_n^{(n)} = 1 (n \geqslant 0)$，定义 $r_n = 0 (n \geqslant 0)$；如存在 k，使 $v_i^{(i)} = 1$, $(i \leqslant k)$，但 $v_{k+1}^{(k+1)} < 1$，则先任取一正数 r_k，并定义不依赖于 m 的

$$r_n = v_n^{(m)} r_k / v_k^{(m)}, \qquad (m > \max(n, k))$$

p, q 及 $\{r_n\}$(除差一正的常数因子外) 被 Q 过程所唯一决定，非负，而且满足条件

$$p + q = 1, \tag{3.2}$$

$$0 < \sum_{i=0}^{\infty} r_i R_i < \infty, \qquad \text{如 } p > 0, \tag{3.3}$$

$$r_n = 0, \qquad \text{如 } p = 0, \tag{3.4}$$

$$q = 0, \qquad \text{如 } S = \infty, \tag{3.5}$$

其中 $R_i = \sum_{j=i}^{\infty} m_j$, m_j 由(1.4)、S 由(1.5) 给出. 下面的定理完满地

解决了构造问题，它说明在全体 Q 过程与全体如上数列之间存在一一对应.

构造定理 设已给(1.2)形的矩阵 Q，满足条件 $R<\infty$. 则下列结论成立：

(i) 任一 Q 过程 $\{x_t(\omega), t\geqslant 0\}$ 的特征数列 $\{p, q, r_n, n\geqslant 0\}$ 满足(3.2)—(3.5).

(ii) 反之，设已给一列非负数 $\{p, q, r_n, n\geqslant 0\}$，满足(3.2)—(3.5)式，则存在唯一 Q 过程 $\{x_t(\omega), t\geqslant 0\}$，它的特征数列重合于此已给数列；而且它的转移概率 $P_{ij}(t)$ 满足

$$P_{ij}(t)=\lim_{n\to\infty}P_{ij}^{(n)}(t). \tag{3.6}$$

这里 $P_{ij}^{(n)}(t)$ 是 $(Q, V^{(n)})$ 过程的转移概率，而分布 $V^{(n)}=(v_0^{(n)}, \cdots, v_n^{(n)})$ 集中在 $(0, 1, \cdots, n)$ 上，如下给出：

若 $p=0$，则令

$$v_j^{(n)}=0\ (0\leqslant j<n),\qquad v_n^{(n)}=1.$$

若 $p>0$，则令

$$v_i^{(n)}=X_n r_i/A_n\quad (0\leqslant i<n).$$

$$v_n^{(n)}=Y_n+X_n\sum_{l=n}^{\infty}r_l c_{ln}/A_n,$$

其中 c_{ln} 由第2篇的（2.6）式给出，又

$$0<A_n=\sum_{l=0}^{\infty}r_l c_{ln}<\infty,$$

$$X_n=\frac{pA_n(z-z_n)}{pA_n(z-z_n)+qA_0 z},$$

$$Y_n=\frac{qA_0}{pA_n(z-z_n)+qA_0 z}.$$

利用构造定理，可以顺利地解决过程的常返性、遍历性以及零壹律等问题详见 [1, 6].

至于 a_0 可以大于0以及过程可以中断情况下的构造问题，则在 [1, 4, 9, 15] 中完全解决.

上述构造方法的进一步发展见 [6, 11].

7.4 其他进展

与生灭过程紧密相关的有双边生灭过程与广生灭过程，前者的状态空间为全体整数；后者则是这样的齐次可列马氏过程，从状态 i 出发，下一步可能向后跳跃到 0，1，…，$i-1$，但向前则只能到 $i+1$. 例如以 x_t 表示 t 时某汽车站的等车人数，一般地，旅客是一次只新来一人，但汽车一到，则剩下的旅客数可能是 0，1，…，x_t-1，因而可视 x_t 为广生灭过程. 张建康第一次系统地讨论了这类过程，引进了数字特征，研究了其积分型泛函的分布等问题. 关于双边生灭过程的研究见 [6，7，10，12]. 近年来开展了齐次马氏过程的可逆性、有势性的研究，并引进了概率流的概念，在 [10，12] 中对生灭过程与双边生灭过程研究了这些问题，取得了相当多的新结果. 薛行雄则研究了生灭过程与位势的关系，此外，关于多维生灭过程的研究还不多，这是一个很值得讨论的课题.

参考文献

[1] 王梓坤. 生灭过程与马尔可夫链. 北京：科学出版社，1980.

[2] 王梓坤. 生灭过程停留时间与首达时间的分布. 中国科学，1980，2：109～117

[3] 王梓坤. On distributions of functionals of birth and death processes and their applications in the theory of queues. Scientia Sinica，1961，X：160～170

[4] 王梓坤，杨向群. 中断生灭过程的构造. 数学学报，1978，21(1)：66～71

[5] 吴荣. 生灭过程的泛函的分布. 数学学报，1981，24(3)：337～358

[6] 杨向群. 可列马尔可夫过程构造论. 第 2 版. 长沙：湖南科技出版社，

1986.
[7] 杨向群.可列马氏过程的积分型泛函和双边生灭过程的边界性质.数学进展，1964，7:397～424
[8] 杨向群.关于生灭过程构造论的注记.数学学报，1965，15:173～187
[9] 杨向群，王梓坤.中断生灭过程构造中的概率分析方法.南开大学学报(自然科学)，1979，3:1～32
[10] 钱敏，侯振挺等. 可逆马尔可夫过程. 长沙：湖南科技出版社，1979.
[11] 侯振挺，郭青峰. 齐次可列马尔可夫过程. 北京：科学出版社，1978.
[12] 郭懋正，吴承训. 双边生灭过程概率流的环流分解. 中国科学，1981，3：271～281
[13] Feller W. An introduction to probability and its application. New York: Wiley & Sons. vol. 1, 1951; II. 1971.
[14] Soloviev A D. Proceedings of the Sixth Berkeley Symp. on Math. Statistics and probability. 1972, 71～86
[15] 杨向群. 一类生灭过程. 数学学报，1965，15：9～31

第 2 卷

随机泛函分析

本卷含 1 篇即第 8 篇. 第 8 篇的原始论文在国内是第一次较系统地论述随机泛函分析的. 其中的 8.4 即广义函数空间中的随机元是作者所得到的结果. 在国内，它开随机泛函分析研究之先河. 随机泛函分析是概率论与泛函分析交界的边缘学科，它以抽象空间中的随机元——抽象空间值随机变量——为研究对象. 随机元是通常的实值随机变数概念的推广. 实数空间中的随机元即通常的随机变数；n 维欧氏空间中的随机元就是通常的 n 维随机向量；而定义在 $[0, \infty)$ 上的实值函数空间中的随机元就是通常的实值随机过程. 自第 8 篇的原始论文发表以来的 30 余年间，随机泛函分析在我国得到较深入的研究和很大的发展.

第 8 篇分 3 部分. 第 1 部分讨论随机元，第 2 部分讨论随机变换. 前面 2 部分是随机泛函分析的一个概要. 第 3 部分是作者得到的新结果，研究了广义函数空间中的随机元，并得到一些极限定理.

第 8 篇　随机泛函分析引论

8.1　产生原因与内容范围

随机泛函分析是概率论与泛函分析交界的边缘学科．产生的原因主要有二：一是由于概率论研究对象的日益扩大，古典概率论主要研究随机变数，这远不能满足其他学科与技术的需要，应该研究一般的随机元，例如随机的曲线、随机的连续函数、随机的可积函数等等，这些元素已不再是实数或复数了．因此，有必要建立一般的理论，以研究抽象空间中的随机元，这样，就必须用到泛函分析中的方法和成果．其次是由于实际中不断地提出随机方程，在这些方程的内部或边界条件中包含着随机的函数．正如泛函分析以一般的算子理论来研究方程一样，有必要建立一般的随机算子的理论，或者说，随机变换的理论，来研究随机方程，例如随机积分方程等等．基于这些原因，研究随机泛函分析的人日益增多．然而由于它的历史很短（就作者所知，1956 年才正式提出随机泛函分析的名称），目前它还处于发展的早期阶段，即主要是用泛函分析来解决一些概率论中的问题的阶段，关于随机变换及其对随机方程的应用还研究得很少．因此，它的内容范围，也远没有定型，不过，如一般所设想的[14]，它至少应该包含 Ba-

nach 空间中随机元、随机变换与随机广义函数三个方面. 作为对这一学科的介绍，除 8.1 节外，本篇就依此而分为三节. 前二节（8.2 与 8.3）是捷克数学家们特别是 Otto Hanš 的工作，这里基本上包含了 [15—18] 中的主要结果与方法. 8.4 研究广义函数空间中的随机元，由于全体广义函数不构成 Banach 空间，故不能利用前二节的主要结果. 与前二节不同，本节内所有结果均由作者得到. 现在分别介绍各节中主要内容与研究情况.

随机元的定义各家不同，E. Mourier[19]称自可测空间（Ω, σ）到 Banach 空间 E 的映象 V 为一随机元，如果对每有界线性泛函 $f\in E^*$（E 的共轭空间），$f(V)$ 是一随机变数. 当 E 为可分 Banach 空间时，此定义与 O. Hanš 的定义一致，但在一般的 Banach 空间则不同. A. H. Колмогоров 和 Ю. В. Прохоров[20]所引进的概念则是随机过程的一般化，把随机元看成可测空间中的测度，我国在此方面工作的有胡国定、郑曾同[21]等人. 本篇中考虑的是概率 1 收敛，在 [20] 中则研究可测距离空间中测度列的收敛，相当于随机变数列依分布收敛的一般化. 因此，在关于极限定理的强弱这一点上，正好彼此补充. 8.2 在讨论随机元的一般性质后，主要研究随机元列的概率 1 的 (χ)-收敛，然后利用所得结果以研究平稳序列. 这里还应该提到 L. E. Dubins 关于随机元的工作 [22]，他的定义与上面提到的均不同.

8.3 讨论随机变换，证明了随机的不动点原理、Banach-Hahn 定理、$C[0, 1]$ 中随机线性泛函的表现定理和逆变换、共轭变换的可测性，为研究随机泛函方程作了基本的准备工作，见 [14].

广义函数空间中的随机元是广义过程. 广义过程的定义也各家不同. [4] 中定义广义过程为基本空间 Φ 上的线性连续随机泛函，收敛性指依概率收敛；[5] 中称广义过程为取值于 L^2（Ω）中的线性连续随机泛函，收敛性指均方收敛；而依 [6] 中的定义，则广义过程的每一现实是 J. Minkusinski，R. Sikorski 观点下的广义函数[8]，我国王寿仁在 [23]、郑绍濂在 [7] 的工作中，即采用这种定义；本篇采用 [9, 10, 11] 中提出的定义，其特点在于使

广义过程的每一现实是L. Schwartz意义下的广义函数[1,2,3]. 8.4中，引进了广义过程的条件数学期望的定义，合理的定义应该具备两个条件：既要保留随机变数的条件期望的基本性质，又应满足极限定理的需要. 从这两点出发，不期发现，广义过程的条件期望应该这样定义，它在形式上与随机变数的条件期望完全一样，接着研究了它的存在与表现形式. 在这项工作完成以后，自然地想到应该类似地研究Banach空间中随机元的条件数学期望，后来知道这项工作已经在[24]中完成. 在得到了随机元列的概率1收敛定理，然后应用它于平稳广义过程序列，以证明对后者的加强大数定理.

为便于阅读，证明的叙述相当详细，本篇中所需的泛函分析知识，可在任何一本泛函分析书如[25]中找到，概率论知识则（至少形式上）不要求，测度论知识见[27]，例如，可测空间的定义见[27] §17.

最后，关于随机泛函分析进一步的问题，这里只提出随机积分方程的研究，看来这是不可避免的课题，但目前已有的工作还是非常初步的（参看[14]).

8.2 随机元

1. 随机元的基本性质

定义 2.1 设 (Ω, σ)，$(X, \mathscr{B})$ 为二非空可测空间，又 V 为自全 $\Omega=(\omega)$ 到 $X=(x)$ 的映象，如果对任意的 $B\in\mathscr{B}$，有 $(\omega: V(\omega)\in B)\in\sigma$，则称 V 为界定于 Ω 上而取值于 X 中的随机元，简记为 $(\Omega, \sigma)-(X, \mathscr{B})$（或 $\Omega-X$）随机元，或称随机变量.

特别，如 $(X, \mathscr{B})$ 为一维Borel可测空间，即 $X=(-\infty, \infty)$，$\mathscr{B}$ 为含 $(-\infty, \infty)$ 中全体开集的最小 σ-代数，则此时 $\Omega-X$ 随机元即通常的随机变数.

有时为了在 X 中考虑收敛性，有必要引进拓扑. 称 $(X, C, \mathscr{B})$ 为可测拓扑空间，如果 (X, C) 为拓扑空间，$(X, \mathscr{B})$ 为可测空间，而且* $\mathscr{B}=\sigma(C)$，这里 C 是 X 中全体开集所成的集. 显然，$\mathscr{B}=\sigma(\mathscr{A})$，$\mathscr{A}$ 为 X 中全体闭集所成的集. 特别，如果 (X, C) 为距离空间，则称 $(X, C, \mathscr{B})$ 为可测距离空间. 以后无必要时 C 及 $\mathscr{B}$ 常略去，而简记 $(X, C, \mathscr{B})$ 为 X.

由定义 2.1 容易推出随机元的下列基本性质.

(i) 设 V 为 (Ω, σ) — $(X, \mathscr{B})$ 随机元，而 τ 为 $(X, \mathscr{B})$ — $(Y, \mathfrak{A})$ 随机元，则 τV 为 (Ω, σ) — $(Y, \mathfrak{A})$ 随机元.

(ii) 反之，为使 V 为 (Ω, σ) — $(X, \mathscr{B})$ 随机元，只要对任意 $(X, \mathscr{B})$ — $(Y, \mathfrak{A})$ 随机元 τ，τV 为 (Ω, σ) — $(Y, \mathfrak{A})$ 随机元，但这里 Y 至少含二不同点 y_1，y_2，而且单点集 $(y_1) \in \mathfrak{A}$，$(y_2) \in \mathfrak{A}$.

(iii) 为使 V 为(Ω, σ)—$(X, \mathscr{B})$随机元，充要条件是:对任意界定在$(X, \mathscr{B})$上的 Borel 可测函数 $g(x)$，gV 是随机变数.

实际上，对任意 $A\in\mathfrak{A}$，$A^{-1}=(x: \tau(x)\in A)\in\mathscr{B}$，故$(\omega: \tau[V(\omega)]\in A)=(\omega: V(\omega)\in A^{-1})\in\sigma$. 得证(i)；对任意 $B\in\mathscr{B}$，令 $\tau(x)=y_1$ 或 y_2，视 $x\in B$ 或 $x\overline{\in} B$ 而定，则$(\omega: V(\omega)\in B)=(\omega: \tau[V(\omega)]=y_1)\in\sigma$. 得证(ii)；由(i)(ii)即得(iii).

如对 X 稍加条件，可以缩小 $g(x)$所在的类，并保持(iii)的正确性，如下:称可测拓扑空间$(X, C, \mathscr{B})$为 N 空间，如对任一闭集 $B\in\mathscr{B}$，存在界定于 X 上的连续(因之 $\mathscr{B}$-可测)函数$h_B(x)$，使当而且只当 $x\in B$ 时，$h_B(x)=0$. 易见可测距离空间是 N 空间**.

(iv) 为使 V 为(Ω, σ)—N 空间随机元，充要条件是对任意闭集 $B\in\mathscr{B}$，$h_B(V)$是随机变数.

事实上，由(iii)得必要性. 充分性则因:对任意闭集 $B\in\mathscr{B}$，$(\omega: V(\omega)\in B)=(\omega: h_B(V(\omega))=0)\in\sigma$；其次，易见使$(\omega:$

---

* 如 N 为一集族，则 $\sigma(N)$ 表示含 N 的最小 σ-代数.

** 例如，令 $h_B(x)=\inf\limits_{y\in B}\rho(x, y)$.

$V(\omega)\in B)\in\sigma$ 的一切 x-集 B 构成 X 中一 σ-代数 $\mathscr{F}$，既然 $\mathscr{F}$ 包含一切闭集，故也包含 $\mathscr{B}=\sigma(\mathscr{A})$.

(v) 设 $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为一列 Ω—X(N 空间)随机元，而且对每 $\omega\in\Omega$，$V_n(\omega)\to V(\omega)$，$V(\omega)\in X$，则 V 也是 Ω—N 空间 X 的随机元.

因为，由(iv)，$\{h_B(V_n)\}_{n=1}^{\infty}$是一列随机变数，由 $h_B(x)$的连续性，得 $h_B(V_n)\to h_B(V)(n\to\infty)$，故由普通概率论知$h_B(V)$也是随机变数，再由(iv)即得(v).

以下简称可测可分距离空间为 SM 空间，可测可分 Banach 空间为 SB 空间，可测距离空间为 M 空间，可测 Banach 空间为 B 空间. 当空间可分时，随机元具有更多的性质，如下：

(vi) 为使 V 为 Ω—X(SM 空间)的随机元，充要条件是：存在一列取有穷多个值的随机元列 $\{V_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty}$，使对任意 $\omega\in\Omega$，$V_n(\omega)\to V(\omega)(n\to\infty)$.

充分性由(v)推出. 设$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$为 X 中可列子集，稠于 X. 对每 $n=1, 2, \cdots, i=1, 2, \cdots, n-1$，令 $B_{11}=X$，$B_{nn}=\{x: \rho(x, x_n)<\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n-1}\rho(x, x_j)\}$，$B_{in}=B_{in-1}\cap(X-B_{nn})$. 显然，对每固定的 n，$\{B_{in}, i=1, 2, \cdots, n\}$是 X 的有穷分解. 定义

$$V_n(\omega)=x_i, \qquad 如\ \omega\in V^{-1}(B_{in}).$$

于是对每 $\omega\in\Omega$，$\rho(V_n(\omega), V(\omega))\to 0$，$\rho$ 表示距离.

(vii) 为使 V 为 Ω—X(SM 空间)的随机元，充要条件是：存在取可列多个值的随机元列$\{V_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty}$，使$\{V_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty}$均匀收敛于 $V(\omega)$.

只须证必要性. 设$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$为 X 中可列稠子集，对每 $i=1, 2, \cdots$及每 $n=1, 2, \cdots$，令

$$A_{in}=\left\{x: \rho(x, x_i)\leqslant\frac{1}{n}\right\}-\bigcup_{j=1}^{i-1}A_{jn},$$

显然，对每固定的 n，$\{A_{in}, i=1, 2, \cdots\}$是 X 的可列分解. 定义

$$V_n(\omega)=x_i, \qquad \omega\in V^{-1}(A_{in}),$$

则对每 ω，$\rho(V_n(\omega), V(\omega))\leqslant\frac{1}{n}$.

(viii) 为使 V 为 $\Omega—X$(SB 空间)的随机元，充要条件是：对每 $f\in X^*$(X 的共轭空间)，$f(V)$是一随机变数.

必要性显然. 下证充分性. 由泛函分析中 Banach-Mazur 定理，可视 X 为 $C[0, 1]$的一子集，这里 $C[0, 1]$是$[0, 1]$上一切连续函数所成的 Banach 空间. $\|x\|=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|$. 因为 $\mathscr{B}$ 为含一切集$\{z: \|z-x\|\leqslant r\}$($x\in X$, $z\in X$, $r\in[0, \infty)$)的最小 σ-代数，故只要证

$$\{\omega: \|V(\omega)-x\|\leqslant r\}\in\sigma.$$

在 $C[0, 1]$上定义线性泛函 g_t：$g_t(x)=x(t)$($x\in C[0, 1]$)，则

$$\{\omega: \|V(\omega)-x\|\leqslant r\} = \bigcap_{t\in H}\{\omega: x(t)-r\leqslant g_t[V(\omega)]\leqslant x(t)+r\},$$

这里 H 为$[0, 1]$中任一可列稠集，由此即得证充分性.

(ix) 设 V_1，V_2 为二 $\Omega—X$(SB 空间)的随机元，则 $V(\omega)=V_1(\omega)+V_2(\omega)$也是 $\Omega—X$ 随机元.

因为，对任意 $f\in X^*$，$f(V(\omega))=f(V_1(\omega))+f(V_2(\omega))$，由(viii)，$f(V_1)$ 及 $f(V_2)$ 为二随机变数，故 $f(V(\omega))$ 也是，再由(viii) 即得所欲证.

注 2.1 如 X 为 B 空间，如[26] 中所证，(ix) 中 $V(\omega)$ 未必是随机元. 这一点是定义 2.1 的弱点；但它具有性质(i)，故又有优点.

2. 概率 1 收敛

从泛函分析中的各种收敛性：强收敛(即依范收敛)、弱收敛等等，抽象出一般的所谓(χ)-收敛，证明以概率 1 的(χ)-收敛定理，并将它运用到各种具体的收敛中去，这就是本小节的主要目的.

设 X 为任一非空集，X_1 为 X 中一切序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$所成的集，X_2 为 X 的一切子集所成的集. 设 χ 为 X_1 到 X_2 的映象，具有性质：

(i) 如 $x_n=x$, $n=1, 2, \cdots$，则 $x\in\chi(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})$；

(ii)$\chi(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}) \subset \chi(\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty})$;

(iii) 如 $x_0 \overline{\in} \chi(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})$，则存在子列 $x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots$，使 $x_0 \overline{\in} \chi(\{x_{n_{i_k}}\}_{k=1}^{\infty})$ 对一切 $x_{n_{i_1}}, x_{n_{i_2}}, \cdots$ 成立.

定义 2.2 称$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}(\chi)$-收敛于$x_0$，如果$x_0 \in \chi(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})$；$X$的子集$M$称为$\chi$-列紧的，如对$M$的每序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，存在子列$\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$，使$\chi(\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}) \neq \varnothing$；$X$的子集$N$称为$M(\subset X)$的$\chi$-闭包，如果$N$由一切如下的$x \in X$构成：存在$M$中的序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，使$x \in \chi(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})$；称$(\chi_1)$-收敛蕴涵$(\chi_2)$-收敛，如对$X$的每一序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\chi_1(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}) \subset \chi_2(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})$.

显然，强收敛与弱收敛都是特殊的(χ)-收敛. 比弱收敛稍许一般化的(χ)-收敛为(Δ)-收敛. 设Δ为X^*的任一子集，(Δ)-收敛由下述映象定义：

$$\Delta(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}) = \bigcap_{f \in \Delta} \{x : x \in X, \lim_{n\to\infty} f(x_n - x) = 0\}.$$

为叙述本小节的基本定理(定理 2.1)，还要引进一概念. 设X为 Banach 空间，集$\Delta(\subset X^*)$称为在集$M(\subset X)$上是全体的，如果由下列二条件就可推出$x = y$：

a) $x \in M$, $y \in M$;

b) 对任意$f \in \Delta$，有$f(x) = f(y)$.

定理 2.1 设$\{V_n\}_{n=0}^{\infty}$为概率空间(Ω, σ, μ)—X(B空间)的随机元列，又μ为完全概率测度；设对每$\omega \in \Omega$，存在$\Delta(\omega) \subset X^*$，使$\Delta(\omega)$在$X$的子集：$\{V_0(\omega)\}$与$\{\bigcup_{n=1}^{\infty}(V_n(\omega))$的$\chi$-闭包$\}$的和集上是全体的；最后，设$(\chi)$-收敛蕴涵$(\Delta(\omega))$-收敛，$(\omega \in \Omega)$.

则$\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$以概率 1(χ)-收敛于V_0的充要条件是：

A. $\mu\{\omega : \bigcup_{n=1}^{\infty}\{V_n(\omega)\}$ 为χ-列紧的$\} = 1$;

B. $\mu\{\omega :$ 对每$f \in \Delta(\omega)$，$\lim_{n\to\infty} f(V_n(\omega) - V_0(\omega)) = 0\} = 1$.

证 由$\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$以概率 1(χ)-收敛于V_0的假定，存在$E \in \sigma$，$\mu(E) = 1$，使至少对每$\omega \in E$，$\{V_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty}(\Delta(\omega))$-收敛于

$V_0(\omega)$，由此及 μ 的完全性得证 B. 其次，对任意 $\omega \in E$，任取 $\bigcup_{n=1}^{\infty}\{V_n(\omega)\}$ 中一序列 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$，则或者存在某 $x_0 \in \bigcup_{n=1}^{\infty}\{V_n(\omega)\}$，使 x_0 在 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ 中出现无穷次，或者对任一 $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty}\{V_n(\omega)\}$，$x$ 在 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ 中只出现有穷次. 在前一情况下，利用性质(i)，在后一情况下，利用性质(ii)，都可以选取子列 x_{i_1}，x_{i_2}，…，使 $\chi(\{x_{i_j}\}_{j=1}^{\infty}) \neq \varnothing$. 此事实既对任一 $\omega \in E$ 以及任一上述的序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 成立，故由 μ 的完全性即得证 A，于是必要性证完.

设使 A，B 同时成立的 ω- 集为 F，$\mu(F) = 1$. 任取 $\omega \in F$，如果说 $\{V_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty}$ 不 (χ)- 收敛于 $V_0(\omega)$，即设 $V_0(\omega) \overline{\in} \chi(\{V_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty})$，则存在一子列 $\{V_{n_i}(\omega)\}_{i=1}^{\infty}$，具有性质(iii). 但因集 $\bigcup_{n=1}^{\infty}\{V_n(\omega)\}$ 是 χ- 列紧的，故存在后一子列的子列 $\{V_{n_{i_k}}(\omega)\}_{k=1}^{\infty}$ 及某元 $x_0 \in X$，使 $x_0 \in \chi(\{V_{n_{i_k}}(\omega)\}_{k=1}^{\infty})$. 由于 (χ)- 收敛蕴涵 $(\Delta(\omega))$- 收敛，故 $x_0 \in \bigcap_{f \in \Delta(\omega)} \{x : \lim_{k\to\infty} f(V_{n_{i_k}}(\omega) - x) = 0\}$. 由此及 B 即知 $f(x_0) = f(V_0(\omega))$ 对每一有界线性泛函 $f \in \Delta(\omega)$ 成立. 既然 $x_0 \in \chi(\{V_{n_{i_k}}(\omega)\})$，故 x_0 属于 $\bigcup_{n=1}^{\infty}\{V_n(\omega)\}$ 的闭包. 根据 $\Delta(\omega)$ 在 $\{V_0(\omega)\}$ 与 $\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty}\{V_n(\omega)\}\text{ 的 }\chi\text{- 闭包}\right\}$ 的和集上是全体的假定，得知 $V_0(\omega) = x_0 = \chi(\{V_{n_{i_k}}(\omega)\}_{k=1}^{\infty})$. 这与(iii)矛盾. 由 μ 的完全性即得证充分性. ∎

注 2.2 如 μ 未必是完全的，也已证明

$$\{\omega : \{V_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty}\ (\chi)\text{- 收敛于 } V_0(\omega)\}$$

$$= \left\{\omega : \bigcup_{n=1}^{\infty}\{V_n(\omega)\}\text{ 为}(\chi)\text{- 列紧的}\right\} \cap \{\omega:$$

$$\lim_{n\to\infty} f(V_n(\omega) - V_0(\omega)) = 0 \text{ 对每 } f \in \Delta(\omega) \text{ 成立}\}.$$

在实际中如下运用定理 2.1：考虑 Banach 空间中某种具体的

收敛，如果它是一种(χ)-收敛，而且蕴涵$(\Delta(\omega))$-收敛，则可于定理2.1中换(χ)-收敛为此具体的收敛而得到相应的或更强的结果. 下定理用强收敛而例示一般.

定理 2.2 设$\{V_n(\omega)\}_{n=0}^{\infty}$为一列$(\Omega, \sigma, \mu)$—$X$($SB$空间)随机元，则$\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$以概率1强收敛于$V_0$的充要条件是：

$$A_1: \mu\left\{\omega: \bigcup_{n=1}^{\infty}\{V_n(\omega)\} \text{ 为强列紧的}\right\} = 1;$$

B_1：对每$f \in \Delta$，这里$\Delta(\subset X^*)$在X上是全体的，有

$$\mu\{\omega: \lim_{n\to\infty} f(V_n(\omega) - V_0(\omega)) = 0\} = 1.$$

证 强收敛是一种(χ)-收敛，而且蕴涵(Δ)-收敛，这里$\Delta \subset X^*$任意. 注意此地未预设μ为完全的. 为证必要性，首先指出，由于使随机变数列收敛的ω-集可测，故B_1中的ω-集可测. 由

$$\mu\{\omega: \lim_{n\to\infty} f(V_n(\omega) - V_0(\omega)) = 0\} \geqslant \mu(E) = 1$$

即得证B_1，这里$E = \{\omega: \{V_n\}_{n=1}^{\infty}$强收敛于$V_0\}$.

同样，如能证A_1中的ω-集D可测，则由定理2.1的证明知$D \supset E$，故$\mu(D) = 1$. 像证8.2中的(viii)一样，可视$X \subset C[0, 1]$. 由 Arzela 定理，有

$$\begin{aligned}
&\left\{\omega: \bigcup_{n=1}^{\infty}\{V_n(\omega)\} \text{ 为强列紧的}\right\} \\
&= \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{\substack{t_1, t_2 \in H \\ |t_1 - t_2| \leqslant \frac{1}{k}}} \bigcap_{n=1}^{\infty} \Big(\{\omega: |g_{t_1}(V_n(\omega))| \\
&\leqslant k\} \cap \left\{|g_{t_1}(V_n(\omega)) - g_{t_2}(V_n(\omega))| \leqslant \frac{1}{m}\right\}\Big),
\end{aligned}$$

其中H为$[0, 1]$中任一可列稠集. 既然$g_t(V_n(\omega))$是随机变数，即知集D可测.

充分性如下证明. 由于X的可分性，对每在X上为全体的集$\Delta(\subset X^*)$，存在Δ的可列子集Δ_0，Δ_0也在X上是全体的. 因此

$$\{\omega: \lim_{n\to\infty} f(V_n(\omega) - V_0(\omega)) = 0 \text{ 对每 } f \in \Delta \text{ 成立}\}$$

$$=\bigcap_{f\in\Delta_0}\{\omega:\lim_{n\to\infty}f(V_n(\omega)-V_0(\omega))=0\},$$

故等号前的 ω- 集的测度为 1. 再由注 2.2 即得证充分性. ▮

自然希望建立对(χ)- 收敛的 Cauchy 收敛原则. 我们放弃一般情况而满足于强收敛，因为一般情况不难类似处理.

定理 2.3 设$\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$为一列(Ω,σ,μ)-X(SB空间)随机元，为使存在Ω—X随机元V_0，使$\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$以概率 1 强收敛于V_0，充要条件是 A_1 及 B_1' 满足：

B_1'：对每 $f\in\Delta$, $\Delta\subset X^*$，Δ 在 X 上是全体的，有

$$\mu\{\omega:\lim_{n,m\to\infty}f(V_n(\omega)-V_m(\omega))=0\}=1$$

当 A_1、B_1' 满足时，V_0 在某 ω- 集 E 上的值唯一，$\mu(E)=1$.

证 必要性由定理 2.2 的必要部分推出. 证充分性. 令

$$E=\{\omega:\bigcup_{n=1}^{\infty}\{V_n(\omega)\}\text{ 为强列紧的}\}$$
$$\cap\bigcap_{f\in\Delta_0}\{\omega:\lim_{n,m\to\infty}f(V_n(\omega)-V_m(\omega))=0\}.$$

则 $\mu(E)=1$. (Δ_0 的意义同前). 任取 $\omega\in E$. 由于 $\bigcup_{n=1}^{\infty}\{V_n(\omega)\}$ 为强列紧的，故存在 $x(\omega)\in X$，使 $\bigcup_{n=1}^{\infty}\{V_n(\omega)\}$ 中某一子列$\{V_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$强收敛于 $x(\omega)$. 既然强收敛性蕴涵任一(Δ)- 收敛性，故对任意 $f\in\Delta$, $f(V_{n_k}(\omega))\to f(x(\omega))$. 由此及 $\lim_{n,m\to\infty}[f(V_n(\omega))-f(V_m(\omega))]=0(f\in\Delta_0)$，可见对任一 $f\in\Delta_0$, $f(V_n(\omega))\to f(x(\omega))$. 如果说具有这种性质的 $x(\omega)$ 有两个为 $x_1(\omega)$ 及 $x_2(\omega)$，则由于 Δ_0 在 X 上的全体性及 $f(x_1(\omega))=\lim_{n\to\infty}f(V_n(\omega))=f(x_2(\omega))$ 即得 $x_1(\omega)=x_2(\omega)$. 今定义

$$V(\omega)=x(\omega),\qquad \omega\in E,$$
$$\quad=\theta(\text{零元}),\qquad \omega\in\Omega-E,$$

则 $V(\omega)$ 具备定理 2.2 中 $V_0(\omega)$ 所应满足的条件，从而$\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$以概率 1 强收敛于 V. 易见 V 是一随机元，因为对任意开集 $\Gamma\in X$，

$$(\omega : V(\omega) \in \Gamma) = \begin{cases} E \cap \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k=m}^{\infty} (V_n(\omega) \in \Gamma), \text{如 } \theta \overline{\in} \Gamma \\ E \cap \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k=m}^{\infty} (V_n(\omega) \in \Gamma) \cup (\Omega - E), \\ \qquad\qquad \text{如 } \theta \in \Gamma. \end{cases}$$

■

3. 平稳序列

试运用上小节一般的收敛定理，来研究平稳序列的加强大数定理.

定义 2.3 设$\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$为一列(Ω, σ, μ)—$(X, \mathscr{B})$随机元，μ为σ上概率测度. 称$\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$为平稳序列，如对任意二正整数n, k，任意$B_i \in \mathscr{B}_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$，有

$$\mu\Big\{\bigcap_{i=1}^{n} (\omega : V_i(\omega) \in B_i)\Big\} = \mu\Big\{\bigcap_{i=1}^{n} (\omega : V_{i+k}(\omega) \in B_i)\Big\}.$$

注 2.3 由此立知，如$\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$为平稳序列，又τ为$(X, \mathscr{B})$—$(Y, \mathfrak{A})$随机元，则$\{\tau(V_n)\}_{n=1}^{\infty}$为$(\Omega, \sigma, \mu)$—$(Y, \mathfrak{A})$平稳序列. 事实上，对任意$B_i \in \mathfrak{A}$, $i = 1, 2, \cdots, n$,

$$\begin{aligned} \mu\Big\{\bigcap_{i=1}^{n} (\omega : \tau(V_i) \in B_i)\Big\} &= \mu\Big\{\bigcap_{i=1}^{n} (\omega : V_i \in \tau^{-1}B_i)\Big\} \\ &= \mu\Big\{\bigcap_{i=1}^{n} (\omega : V_{i+k} \in \tau^{-1}B_i)\Big\} \\ &= \mu\Big\{\bigcap_{i=1}^{n} (\omega : \tau(V_{i+k}) \in B_i)\Big\}. \end{aligned}$$

定理 2.4 设$\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$为(Ω, σ, μ)-X(SB空间)平稳序列，又$\int_{\Omega} \| V_1(\omega) \| \mu(\mathrm{d}\omega) < \infty$，则存在一$\Omega$—$X$随机元$V_0$，使随机元列$\{U_s\}_{s=1}^{\infty}$

$$U_s(\omega) = \frac{1}{s}\sum_{k=1}^{s} V_k(\omega)$$

以概率1强收敛于V_0，又V_0的值在某E上唯一，$\mu(E) = 1$.

证 只要验证定理2.3中条件A_1与B'_1成立. 对任意有界线性泛函$f \in X^*$，由注2.3知$\{f(V_n)\}_{n=1}^{\infty}$是平稳随机变数列. 由

Birkhoff-Хинчин 定理，可见随机变数列$\{f(U_n)\}_{n=1}^{\infty}$以概率 1 收敛. 剩下只要证

$$\mu\left\{\omega:\ \bigcup_{s=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{s}\sum_{k=1}^{s}V_k(\omega)\right\}\text{为强列紧的}\right\}=1.$$

设$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$为不含θ的稠于X的可列集. 对每$i=1,2,\cdots$及每$n=1,2,\cdots$，令

$$A_{in}=\left\{x:\ \|x-x_i\|\leqslant\frac{1}{n}\right\}-\bigcup_{j=1}^{i-1}A_{jn}.$$

对每$n=1,2,\cdots$及$m=1,2,\cdots$，定义X—X的映象τ_n，${}_1\sigma_{mn}$，${}_2\sigma_{mn}$如下：

$$\tau_n^{-1}(x_i)=A_{in},\ i=1,2,\cdots$$

$${}_1\sigma_{mn}^{-1}(\theta)=\bigcup_{j=1}^{m}A_{jn},$$

$${}_1\sigma_{mn}^{-1}(x_i)=A_{in}-\bigcup_{j=1}^{m}A_{jn},\ i=1,2,\cdots$$

$${}_2\sigma_{mn}^{-1}(\theta)=\bigcup_{j=m+1}^{\infty}A_{jn},$$

$${}_2\sigma_{mn}^{-1}(x_i)=A_{in}-\bigcup_{j=m+1}^{\infty}A_{jn},\ i=1,2,\cdots$$

显然，对每$m=1,2,\cdots$，$n=1,2,\cdots$及$x\in X$，有

$${}_1\sigma_{mn}(x)+{}_2\sigma_{mn}(x)=\tau_n(x).\tag{2.1}$$

$$\|x-\tau_n(x)\|\leqslant\frac{1}{n}.\tag{2.2}$$

又

$$\begin{aligned}\int_\Omega\|\tau_n(V_k(\omega))\|\mu(\mathrm{d}\omega)&=\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i\|\mu\{\omega:V_1(\omega)\in A_{in}\}\\&=\int_\Omega\|V_k(\omega)+\tau_n(V_k(\omega))-V_k(\omega)\|\mu(\mathrm{d}\omega)\\&\leqslant\int_\Omega\|V_1(\omega)\|\mu(\mathrm{d}\omega)+\frac{1}{n}<\infty,\end{aligned}$$

因此

$$\int_\Omega\|\ {}_1\sigma_{mn}(V_k(\omega))\|\mu(\mathrm{d}\omega)$$

$$= \sum_{i=m+1}^{\infty} \| x_i \| \mu\{\omega : V_1(\omega) \in A_{in}\} < \infty,$$

$$\int_\Omega \| {}_2\sigma_{mn}(V_k(\omega)) \| \mu(\mathrm{d}\omega)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \| x_i \| \mu\{\omega : V_1(\omega) \in A_{in}\} < \infty.$$

由注 2.3 知$\{\| {}_1\sigma_{mn}(V_k) \|\}_{k=1}^{\infty}$及$\{\chi_{\{x_i\}}({}_2\sigma_{mn}(V_k))\}_{k=1}^{\infty}$为二平稳随机变数序列(这里$\{x_i\}$为单点集，而$\chi_A(y) = 0$，如$y \overline{\in} A$；$\chi_A(y) = 1$，如$y \in A$).前后二序列中每随机变数的数学期望分别等于

$$\sum_{i=m+1}^{\infty} \| x_i \| \mu\{\omega : V_1(\omega) \in A_{in}\}$$

及

$$\begin{cases} \mu\{\omega : V_1(\omega) \in A_{in}\}, & \text{如 } i \leqslant m; \\ 0, & \text{如 } i > m. \end{cases}$$

因此，存在非负随机变数${}_1\xi_{mn}$及${}_2^i\xi_{mn}$，使

$$\begin{aligned} &\frac{1}{s}\sum_{k=1}^{s} \| {}_1\sigma_{mn}(V_k) \|, \\ &\frac{1}{s}\sum_{k=1}^{s} \chi_{\{x_i\}}({}_2\sigma_{mn}(V_k)) \qquad (s = 1, 2, \cdots) \end{aligned} \tag{2.3}$$

分别以概率 1 收敛于${}_1\xi_{mn}$与${}_2^i\xi_{mn}$.

在前一情况下，因

$$\int_\Omega {}_1\xi_{mn}\mu(\mathrm{d}\omega) = \sum_{i=m+1}^{\infty} \| x_i \| \mu\{\omega : V_1(\omega) \in A_{in}\} < \infty,$$

故 $\lim\limits_{m\to\infty}\int_\Omega {}_1\xi_{mn}(\omega)\mu(\mathrm{d}\omega) = 0$,于是存在子列

$${}_1\xi_{m_1 n}, \qquad {}_1\xi_{m_2 n}, \ \cdots \tag{2.4}$$

以概率 1 收敛于 0；在后一情况下，因为平稳随机元列$\{{}_2\sigma_{mn}(V_k)\}_{k=1}^{\infty}$中之通项可写为

$${}_2\sigma_{mn}(V_k) = \sum_{i=1}^{m} x_i \chi_{\{x_i\}}({}_2\sigma_{mn}(V_k)),$$

故知序列

$$ {}_2\sigma_{mn}(V_1),\ \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}{}_2\sigma_{mn}(V_k),\cdots \tag{2.5} $$

以概率 1 强收敛于随机元

$$ {}_2\xi_{mn}=\sum_{i=1}^{m}x_i\,{}_2^i\xi_{mn}. $$

使序列(2.3)、(2.4)、(2.5)收敛的 ω-集分别记为${}_1E_{mn}$，E_n 及 ${}_2E_{mn}$，令

$$ E=\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{\infty}({}_1E_{mn}\cap E_n\cap{}_2E_{mn})\in\sigma, $$

$\mu(E)=1$.

对任意 $\varepsilon>0$，取正整数 $N\geqslant\frac{4}{\varepsilon}$，又对每 $\omega\in E$，存在正整数 p_ω，使 $p\geqslant p_\omega$ 时，

$$ |{}_1\xi_{m_pN}(\omega)|\leqslant\frac{\varepsilon}{4}. \tag{2.6} $$

对此相同的 $\omega\in E$，存在正整数 s_ω，使 $s\geqslant s_\omega$ 时，下二不等式同时成立：

$$ \left|\frac{1}{s}\sum_{k=1}^{s}\|{}_1\sigma_{m_{p_\omega}N}(V_k(\omega))\|-{}_1\xi_{m_{p_\omega}N}(\omega)\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{4}, \tag{2.7} $$

$$ \left\|\frac{1}{s}\sum_{k=1}^{s}\|{}_2\sigma_{m_{p_\omega}N}(V_k(\omega))-{}_2\xi_{m_{p_\omega}N}(\omega)\right\|\leqslant\frac{\varepsilon}{4}. \tag{2.8} $$

于是对每 $\omega\in E$，集

$$ \bigcup_{s=1}^{s_\omega}\left\{\frac{1}{s}\sum_{k=1}^{s}V_k(\omega)\right\}\cup\{{}_2\xi_{m_{p_\omega}N}(\omega)\} $$

形成一有穷 ε-网. 实际上，对每 $\omega\in E$ 及每 $s>s_\omega$，由(2.2)(2.1)(2.8)(2.7)(2.6)及$\frac{1}{N}\leqslant\frac{\varepsilon}{4}$有

$$ \left\|\frac{1}{s}\sum_{k=1}^{s}V_k(\omega)-{}_2\xi_{m_{p_\omega}N}(\omega)\right\| $$

$$ =\left\|\left[\frac{1}{s}\sum_{k=1}^{s}V_k(\omega)-\frac{1}{s}\sum_{k=1}^{s}\tau_N(V_k(\omega))\right]\right. $$

$$+\left[\frac{1}{s}\sum_{k=1}^{s}\tau_N((V_k(\omega))-\frac{1}{s}\sum_{k=1}^{s}{}_2\sigma_{m_{p_\omega}N}V_k(\omega))\right]$$

$$+\left[\frac{1}{s}\sum_{k=1}^{s}{}_2\sigma_{m_{p_\omega}N}(V_k(\omega))-{}_2\xi_{m_{p_\omega}N}(\omega)\right]\Bigg\|$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{4}+\left\|\frac{1}{s}\sum_{k=1}^{s}{}_1\sigma_{m_{p_\omega}N}(V_k(\omega))\right\|+\frac{\varepsilon}{4}$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{4}+\frac{1}{s}\sum_{k=1}^{s}\left\|{}_1\sigma_{m_{p_\omega}N}(V_k(\omega))\right\|+\frac{\varepsilon}{4}$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{4}+\left|\frac{1}{s}\sum_{k=1}^{s}\|{}_1\sigma_{m_{p_\omega}N}(V_k(\omega))\|-{}_1\xi_{m_{p_\omega}N}(\omega)\right|$$

$$+{}_1\xi_{m_{p_\omega}N}+\frac{\varepsilon}{4}\leqslant\varepsilon.$$

■

定义 2.4 设$\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$为(Ω,σ,μ)—$(X,\mathscr{B})$随机元列. 称$\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$为独立序列，如果对任意正整数 n，任意 $B_i\in\mathscr{B}$ $i=1,\cdots,n$，有

$$\mu\Big(\bigcap_{i=1}^{n}\{\omega:V_i(\omega)\in B_i\}\Big)=\prod_{i=1}^{n}\mu(\omega:V_i(\omega)\in B_i);$$

称$\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$同分布，如对任意正整数 i，k 及 $B\in\mathscr{B}$，有

$$\mu(\omega:V_i(\omega)\in B)=\mu(\omega:V_k(\omega)\in B);$$

对任一(Ω,σ,μ)—X(B 空间) 随机元 $V(\omega)$，如果它关于 μ 的 Bochner 积分$\int_\Omega V(\omega)\mu(\mathrm{d}\omega)$ 存在，则称此积分为 $V(\omega)$ 的数学期望，记为 EV.

由泛函分析知，对可分 Banach 空间，$EV=\int_\Omega V(\omega)\mu(\mathrm{d}\omega)$ 存在的充要条件是：勒贝格积分$\int_\Omega\|V(\omega)\|\mu(\mathrm{d}\omega)<\infty$.

定理 2.5(独立同分布随机元列的加强大数定理) 设$\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$为(Ω,σ,μ)—X(SB 空间)的独立同分布随机元列，为使随机元列$\{U_s\}_{s=1}^{\infty}$.

$$U_s(\omega)=\frac{1}{s}\sum_{k=1}^{s}V_k(\omega)$$

以概率 1 收敛于 EV_1 的充要条件是 EV_1 存在.

证 必要性不必证. 反之, 既然 EV_1 存在, 故
$\int_\Omega \| V_1(\omega) \| \mu(\mathrm{d}\omega) < \infty$, 又因 $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为平稳序列, 故由定理2.4 之证知

$$\mu\left\{\omega: \bigcup_{n=1}^{\infty} \{U_n(\omega)\}\text{是强列紧的}\right\}=1.$$

既然对每 $f\in X^*$, 随机变数列 $\{f(U_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 以概率 1 收敛于 $f(EV_1)$, 故由定理 2.2 即得证. ∎

8.3 随机变换

1. 随机变换的定义

定义 3.1 设 (Ω, σ)、$(E, \mathscr{B})$ 为二可测空间, Γ 为任一非空集. 自 $\Omega\times\Gamma$ 到 E 的变换 $T(\omega, \gamma)$ 称为随机变换, 如对任意固定的 $\gamma\in\Gamma$, $B\in\mathscr{B}$,

$$(\omega: T(\omega, \gamma)\in B)\in\sigma, \tag{3.1}$$

换言之, 如对任意固定的 $\gamma\in\Gamma$, $T(\omega, \gamma)$ 是 Ω—E 随机元, 则 T 是一随机变换.

如果把 $T(\omega, \gamma)$ 记成 $T(\omega)\gamma$, 则更易看出它与泛函分析中算子 T 的类似性. 因为当 $\omega\in\Omega$ 固定时, $T(\omega)$ 将 Γ 变到 E, 故有时也称 $T(\omega, \gamma)=T(\omega)\gamma$ 为随机算子.

设 $(E, \mathscr{B})$、$(\Gamma, \mathfrak{A})$ 为二可测距离空间, 各有距离为 δ, ρ. 又 $f(\omega)$ 为 (Ω, σ)—$(\Gamma, \mathfrak{A})$ 随机元, 称随机变换 $T(\omega, \gamma)$ 在 $f(\omega)$ 为局部压缩的, 如存在随机变数 $C(\omega)<1$, 使对每 $\omega\in\Omega$ 及 $\gamma\in\Gamma$, 有

$$\delta(T(\omega, \gamma), T(\omega, f(\omega)))\leqslant C(\omega)\rho(\gamma, f(\omega)), \tag{3.2}$$

称 $T(\omega, \gamma)$ 为压缩的, 如存在随机变数 $C(\omega)<1$, 使对每 $\omega\in\Omega$ 及 γ_1, $\gamma_2\in\Gamma$, 有

$$\delta(T(\omega,\gamma_1),T(\omega,\gamma_2))\leqslant C(\omega)\rho(\gamma_1,\gamma_2). \tag{3.3}$$

如果(3.2)、(3.3)中的 $C(\omega)\leqslant C_0<1$，C_0 为一常数，则分别称 $T(\omega,\gamma)$在 $f(\omega)$为均匀局部压缩的及均匀压缩的. 称 $T(\omega,\gamma)$为连续的，如对任意 $\omega\in\Omega$，任意 $\gamma_0\in\Gamma$，当 $\gamma_n\in\Gamma$，$\gamma_n\to\gamma_0(n\to\infty)$时，有

$$T(\omega,\gamma_n)\to T(\omega,\gamma_0). \tag{3.4}$$

称 $T(\omega,\gamma)$为有界的，如对任意 $\omega\in\Omega$，$\gamma_1\in\Gamma$，$\gamma_2\in\Gamma$，有

$$\delta(T(\omega,\gamma_1),T(\omega,\gamma_2))\leqslant C(\omega)\rho(\gamma_1,\gamma_2)$$
$$(\infty>C(\omega)\geqslant 0). \tag{3.5}$$

设$(E,\mathscr{B})$、$(\Gamma,\mathfrak{A})$为二 B 空间，称 $T(\omega,\gamma)$为线性的，如对每 $\omega\in\Omega$、$\gamma_1\in\Gamma$、$\gamma_2\in\Gamma$ 及任二实数 α，β，有

$$T(\omega,\alpha\gamma_1+\beta\gamma_2)=\alpha T(\omega,\gamma_1)+\beta T(\omega,\gamma_2). \tag{3.6}$$

称随机变换 $T(\omega,\gamma)$为随机泛函，如果$(E,\mathscr{B})$为一维 Borel 可测空间.

如果(Ω,σ)为概率空间(Ω,σ,μ)，则可类似地定义以概率 1 压缩的、以概率 1 连续的随机变换等等.

引理 3.1 设 $T(\omega,\gamma)$为 $\Omega\times\Gamma$—$(E,\mathscr{B})$连续随机变换，其中$(\Gamma,\mathfrak{A})$为 SM 空间，又 V 为 Ω—Γ 随机元，则 $U(\omega)=T(\omega,V(\omega))$为 Ω—E 随机元.

证 由 8.2 中的(vii)，存在一列取可列多个值的 Ω—Γ 随机元$\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$，均匀收敛于 V. 定义

$$U_n(\omega)=T(\omega,V_n(\omega)),$$

则对每 $B\in\mathscr{B}$，有

$$(\omega:U_n(\omega)\in B)$$
$$=\bigcup_{i=1}^{\infty}(\omega:T(\omega,x_i)\in B)\cap(\omega:V_n(\omega)=x_i)\in\sigma,$$

这里的$\{x_i\}$、$\{V_n\}$的选取如 8.2 中的(vii)，因而$\{U_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty}$为一列$(\Omega,\sigma)$—$(E,\mathscr{B})$随机元. 由于 T 的连续性即得所欲证. ∎

2. 随机不动点原理

不动点原理在研究各类方程的存在与唯一性问题中，起着重

要作用.类似地，为了研究随机方程，有必要建立随机不动点原理.作为初步，有

定理 3.1 设 T 为 $(\Omega, \sigma, \mu)\times E$—$(E, \mathscr{B})$ 的随机变换，E 为完备的 SM 空间，又 T 以概率 1 为压缩的，则存在 Ω—E 随机元 $\varphi(\omega)$，它在 ω-集 G 上唯一，$\mu(G)=1$，使

$$\mu(\omega : T(\omega, \varphi(\omega))=\varphi(\omega))=1;$$

又 $\varphi(\omega)$ 可以由某随机元列 $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ 逼近，其中 V_1 可任意选取.

证 令 $G=(\omega : T$ 为压缩的)，则 $\mu(G)=1$. 对任意固定的 $\omega\in G$，由泛函分析知存在唯一 $e(\omega)\in E$，它满足 $T(\omega, e(\omega))=e(\omega)$. 定义

$$\varphi(\omega)=\begin{cases} e(\omega), & \text{如 } \omega\in G; \\ e & \text{如 } \omega\in \Omega-G, \end{cases}$$

其中 e 为 E 中任一定点. 因为对每固定 $\omega\in G$，T 是连续的，故可以用引理 3.1. 任意选取随机元 V_1，并定义

$$V_{n+1}(\omega)=\begin{cases} T(\omega, V_n(\omega)), & \omega\in G; \\ e, & \omega\in \Omega-G. \end{cases}$$

显然随机元列 $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 $\varphi(\omega)$. 由 8.2 中的(v)即知 $\varphi(\omega)$ 也是随机元，而且具有所需的性质. ▮

下面考虑一列连续随机变换的情形，作为随机逼近，下面的定理甚为有用.

定理 3.2 设 $\varphi, f_1, f_2, \cdots$ 为 (Ω, σ, μ)—E(SM 空间)的随机元，μ 为完全的概率测度，$C(\omega)$ 为随机变数，$\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为一列 $\Omega\times E$—E 的连续随机变换，使下列条件满足：

$$0\leqslant C(\omega)<1 \quad (\omega\in\Omega),$$

$$\mu\{\omega : \lim_{n\to\infty}\rho(f_n(\omega), \varphi(\omega))=0\}=1,$$

$$\mu\{\omega : \lim_{n\to\infty}\rho(T_n(\omega, \varphi(\omega)), \varphi(\omega))=0\}=1,$$

$$\mu\{\omega : \rho(T_n(\omega, x), T_n(\omega, f_n(\omega))) \leqslant C(\omega)\rho(x, f_n(\omega))\}=1,$$

$$(n=1, 2, \cdots, x\in E),$$

取 $V_1(\omega)$ 为任意 Ω—E 随机元，令

$$V_{n+1}(\omega)=T_n(\omega, V_n(\omega)),$$

则 $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为一列 Ω—E 随机元，以概率 1 收敛于 φ.

证 由引理 3.1 知 $V_n(\omega)$ 为随机元. 令

$$\begin{aligned}G=&\{\omega: \lim_{n\to\infty} f_n(\omega)=\varphi(\omega)\}\\&\cap\{\omega: \lim_{n\to\infty} T_n(\omega, \varphi(\omega))=\varphi(\omega)\}\\&\cap\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcap_{x\in H}\{\omega: \rho(T_n(\omega, x), T_n(\omega, f_n(\omega)))\\&\qquad\leqslant C(\omega)\rho(x, f_n(\omega))\},\end{aligned}$$

其中 H 为 E 中可列稠集，由假定知 $\mu(G)=1$. 由随机变换的连续性，有

$$\begin{aligned}G\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcap_{x\in E}&\{\omega: \rho(T_n(\omega, x), T_n(\omega, f_n(\omega)))\\&\leqslant C(\omega)\rho(x, f_n(\omega))\}.\end{aligned}$$

今任意固定 $\omega\in G$，反复用三角不等式，即得

$$\begin{aligned}&\rho(V_{n+1}(\omega), \varphi(\omega))=\rho(T_n(\omega, V_n(\omega)), \varphi(\omega))\\\leqslant&\rho(T_n(\omega, V_n(\omega)), T_n(\omega, f_n(\omega)))\\&+\rho(T_n(\omega, f_n(\omega)), T_n(\omega, \varphi(\omega)))\\&+\rho(T_n(\omega, \varphi(\omega)), \varphi(\omega))\\\leqslant&C(\omega)\rho(V_n(\omega), f_n(\omega))+C(\omega)\rho(f_n(\omega), \varphi(\omega))\\&+\rho(T_n(\omega, \varphi(\omega)), \varphi(\omega))\\\leqslant&C(\omega)\rho(V_n(\omega), \varphi(\omega))+2C(\omega)\rho(f_n(\omega), \varphi(\omega))\\&+\rho(T_n(\omega), \varphi(\omega)), \varphi(\omega)).\end{aligned}$$

对 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，使 $n\geqslant N$ 时，下二式均成立：

$$C(\omega)\rho(f_n(\omega), \varphi(\omega))\leqslant\frac{1-C(\omega)}{8}\varepsilon,$$

$$\rho(T_n(\omega, \varphi(\omega)), \varphi(\omega))\leqslant\frac{1-C(\omega)}{4}\varepsilon.$$

因此，对每 $n\geqslant N$ 有

$$\begin{aligned}\rho(V_{n+1}(\omega), \varphi(\omega))\leqslant&C(\omega)\rho(V_n(\omega), \varphi(\omega))\\&+\frac{1-C(\omega)}{2}\varepsilon,\end{aligned}$$

由归纳法，即得对任意 $k=1, 2, \cdots$，有

$$\rho(V_{N-k}(\omega), \varphi(\omega)) \leqslant C^k(\omega)\rho(V_N(\omega), \varphi(\omega)) + \frac{1-C(\omega)}{2}\varepsilon \sum_{i=1}^{k} C^{i-1}(\omega).$$

因 $0 \leqslant C(\omega) < 1$，故当 k 大于某正整数 M 时，上式右方小于 ε. 于是得证对任意 $\omega \in G$，$V_n(\omega) \to \varphi(\omega)$. 由 μ 之完全性即知定理结论正确. ∎

作为上述定理的应用，试讨论下列问题：设 $T(\omega, x)$ 为均匀压缩随机变换，而且对每固定的 $x \in E$，Bochner 积分

$$S(x) = \int_{\Omega} T(\omega, x)\mu(\mathrm{d}\omega) \tag{3.7}$$

存在. 易见 $S(x)$ 是 E—E 压缩变换，因而存在唯一不动点 x_0，使 $S(x_0)=x_0$. 换言之，x_0 是 $T(\omega, x)$ 的数学期望 $S(x)$ 的不动点. 试问如何根据对 $T(\omega, x)$ 的一列独立的观察以求 x_0? 与概率论中加强大数定理类似，有

定理 3.3 设 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为一列 $(\Omega, \sigma, \mu) \times E$—$E$ 的连续随机变换，这里 μ 为完全的概率测度，又 $E=(E, \mathscr{B})$ 为 SB 空间. 设

i) 对任意固定的 $x \in E$，$\{T_n(\omega, x)\}_{n=1}^{\infty}$ 是一列独立同分布随机元；

ii) 对任意固定的 $x \in E$，$T_1(\omega, x)$ 的 Bochner 积分 (3.7) 存在；

iii) 存在常数 $c<1$，使对每对 $x, y \in E$，每 $n=1, 2, \cdots$

$$\mu\{\omega: \| T_n(\omega, x) - T_n(\omega, y) \| \leqslant c \| x-y \| \} = 1,$$

则存在随机元列 $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$，以概率 1 收敛于 $S(x)$ 的唯一不动点 x_0，可如下取 $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$：$V_1(\omega)$ 为任意随机元，$V_{n+1}(\omega) = S_n(\omega, V_n(\omega))$，而

$$S_n(\omega, x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i(\omega, x).$$

证 不妨把 $S(x)$ 也看成随机变换 $S(\omega, x)$ $(\equiv S(x))$. 由于 S，$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ 都是以概率 1 为均匀压缩随机变换，故由定理 3.1，存

在随机元列 $\varphi(\equiv x_0)$，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$分别是它们的随机不动点(概率 1)．由定理 2.5 及其中的假设(i)，(ii)，对每 $x\in E$，随机元列$\{S_n(\omega, x)\}_{n=1}^{\infty}$以概率 1 收敛于 $S(x)$．既然每个 $f_n(\omega)$都是随机不动点，故对每 $\omega\in\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcap_{x\in E}\{\|T_i(\omega, x)-T_i(\omega, x_0)\|\leqslant c\|x-x_0\|\}$，有

$$\begin{aligned}\|f_n(\omega)-x_0\| &\leqslant \|f_n(\omega)-S_n(\omega, x_0)\| \\ &\quad+\|S_n(\omega, x_0)-x_0\| \\ &=\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}T_i(\omega, f_n(\omega))-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}T_i(\omega, x_0)\right\| \\ &\quad+\|S_n(\omega, x_0)-x_0\| \\ &\leqslant c\|f_n(\omega)-x_0\|+\|S_n(\omega, x_0)-x_0\|.\end{aligned}$$

因此，$\|f_n(\omega)-x_0\|\leqslant\frac{1}{1-c}\|S_n(\omega, x_0)-x_0\|$，从而

$$\mu\{\omega: \lim_{n\to\infty}f_n(\omega)=\varphi(\omega)\}=1.$$

这样，定理 3.2 中一切条件满足而本定理得证. ∎

3. 若干定理的随机化

泛函分析中许多重要的定理，如 Tietze 定理、Banach-Hahn 定理以及具体空间中线性泛函的表现定理等等，在随机情况，自应有对应的定理. 本小节中即研究此问题. 结果发现，问题的实质归结为可测性是否成立. 由于基本思想容易掌握，这里只讨论随机的 Banach-Hahn 定理及 $C[0, 1]$中线性泛函的表现.

以$(R_1, \mathscr{B}_1)$表示一维 Borel 可测空间，Γ 为可分实线性赋范空间，$M\subset\Gamma$，M 是一线性流型.

定理 3.4 设 V 为$(\Omega, \sigma)\times M—(R_1, \mathscr{B}_1)$的随机变换，$\Gamma$，$M$ 满足上述条件. 如果

i)对每 $\omega\in\Omega$，$\alpha\in R_1$，$\beta\in R_1$，$x\in M$，$y\in M$，

$$V(\omega, \alpha x+\beta y)=\alpha V(\omega, x)+\beta V(\omega, y),$$

ii)对每对$(\omega, x)\in\Omega\times M$，有$|V(\omega, x)|\leqslant S(\omega)\|x\|$，这里 $S(\omega)=\sup_{x\in O\cap M}|V(\omega, x)|$，而 $O=\{x: \|x\|=1\}$.

于是存在$(\Omega, \sigma)\times\Gamma-(R_1, \mathscr{B}_1)$的随机变换 T，使

a. 对每对$(\omega, x)\in\Omega\times M$，$T(\omega, x)=V(\omega, x)$；

b. 对每个$\omega\in\Omega$，$\alpha\in R_1$，$\beta\in R_1$，$x\in\Gamma$，$y\in\Gamma$，

$$T(\omega, \alpha x+\beta y)=\alpha T(\omega, x)+\beta T(\omega, y);$$

c. 对每对$(\omega, x)\in\Omega\times\Gamma$，$|T(\omega, x)|\leqslant S(\omega)\|x\|$.

证 如下造T. 因Γ可分，存在可列集$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，它是$\Gamma-M$的稠密子集. 令M_n为$M\cup\bigcup\limits_{k=1}^{n}\{x_k\}$所产生的线性流型$(n=0, 1, 2, \cdots)$，又$\Gamma_0=\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}M_n$. 令

$$V_0(\omega,x)=\begin{cases}V(\omega,x) & \text{如}(\omega,x)\in\Omega\times M_0,\\ =0, & \text{如}(\omega,x)\in\Omega\times(\Gamma_0-M_0).\end{cases}$$

$$V_n(\omega,x)=V_{n-1}(\omega,x)=0,\ \text{如}(\omega,x)\in\Omega\times(\Gamma_0-M_n),$$

$$V_n(\omega,x+tx_n)=V_{n-1}(\omega,x)+t\cdot\sup_{x\in M_{n-1}}(V_{n-1}(\omega,x)-S(\omega)\|x-x_n\|),$$

$$\text{如}\ \omega\in\Omega,\ x\in M_{n-1},\ t\in R.$$

再对每一对$(\omega, x)\in\Omega\times\Gamma_0$，令

$$T(\omega, x)=T_0(\omega, x)=\lim_{n\to\infty}V_n(\omega, x),$$

对 $y\in\Gamma-\Gamma_0$，$y=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$，$y_n\in\Gamma_0$，令

$$T(\omega, y)=\lim_{n\to\infty}T_0(\omega, y_n).$$

由泛函分析知，对每固定的$\omega\in\Omega$，$T(\omega, y)$是一有界线性泛函，它是$V(\omega, y)$自M到全Γ上的扩张，而且保留范不变. 因此，剩下只要证可测性. 由Γ的可分性，

$$\{\omega: S(\omega)\leqslant c\}=\bigcup_{x\in\tilde{o}}\{\omega: |V_n(\omega, x)|\leqslant c\},$$

其中$\tilde{o}\subset O$为某可列稠集. 因V为随机变换，故V_0为$\Omega\times\Gamma_0-R_1$的随机变换. 对每个$c\in R_1$，有

$$\{\omega: \sup_{x\in M_{n-1}}(V_{n-1}(\omega, x)-S(\omega)\|x-x_n\|)\leqslant c\}$$

$$=\bigcap_{x\in\tilde{M}_{n-1}}\{\omega: (V_{n-1}(\omega, x)-S(\omega)\|x-x_n\|)\leqslant c\},$$

其中$\tilde{M}_{n-1}(\subset M_{n-1})$为可列并稠于$M_{n-1}$之集，故$T_0$是$\Omega\times\Gamma_0-R_1$

的随机变换，因而 T 是 $\Omega\times\Gamma—R_1$ 的随机变换. ∎

如果除去 Γ 为可分空间的假定，定理 3.4 是否正确？尚不可知，但如 Γ 是 Hilbert 空间（不必可分），M 为 Γ 的子 Hilbert 空间时，定理 3.4 的结论正确，因为每 $x\in\Gamma$ 可唯一地展为 $x=y+z$，其中 $y\in M$ 而 $z\perp M$，故只要令 $T(\omega, x)=V(\omega, y)$ 即可.

定理 3.5（**M. Ullrich**）设 $T(\omega, x)$ 为 $(\Omega, \sigma)\times C[0, 1]—(R_1, \mathscr{B}_1)$ 线性连续随机变换，则存在 $(\Omega, \sigma)\times[0, 1]—(R_1, \mathscr{B}_1)$ 随机变换 $g(\omega, t)$，当 $\omega\in\Omega$ 固定时，$g(\omega, t)$ 是 t 的有界变差函数，而且对每个 $\omega\in\Omega$，$x\in C[0, 1]$，有

$$T(\omega, x)=\int_0^1 x(t)\mathrm{d}g(\omega, t).$$

证 对每固定的 $\omega\in\Omega$，$T(\omega, x)$ 是 $C[0, 1]$ 上线性泛函，故由泛函分析知存在有界变差函数 $g(\omega, t)$ 使上式成立. 不失一般性，可设 $g(\omega, 1)=0(\omega\in\Omega)$，而且 $g(\omega, t)$ 在 $(0, 1)$ 中关于 t 右连续. 剩下只要证 $g(\omega, t)$ 是一随机变换，即只要证对每固定的 $t\in[0, 1]$，$g(\omega, t)$ 是一随机变数. 当 $t=0$ 时，因*

$$T(\omega, 1)=\int_0^1\mathrm{d}g(\omega, t)=-g(\omega, 0)$$

而结论成立. 令 $t_0\in(0, 1)$. 定义一列连续函数 $\{a_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 如下：

$$a_n(t)=\begin{cases}1, & \text{如 } 0\leqslant t\leqslant t_0;\\ -n(t-t_0)+1, & \text{如 } t_0<t<t_0+\dfrac{1}{n};\\ 0, & \text{如 } t\geqslant t_0+\dfrac{1}{n}.\end{cases}$$

显然

$$\begin{aligned}g(\omega, t_0)&=g(\omega, 0)+\lim_{n\to\infty}\int_0^1 a_n(t)\mathrm{d}g(\omega, t)\\&=g(\omega, 0)+\lim_{n\to\infty}T(\omega, a_n),\end{aligned}$$

因而 $g(\omega, t_0)$ 是一随机变数. 最后，因 $g(\omega, 1)$ 是一常数，故是一随机变数. ∎

---

* 下式 $T(\omega, 1)$ 中，1 表示恒等于 1 的函数.

4. 随机逆变换与共轭变换

在泛函分析中，逆算子与共轭算子起着重要作用. 自然地提出问题：对已给随机变换 $T(\omega, x)$，试问其逆变换（依赖于 ω）是否存在？如存在，是否是随机变换？前一问题由普通泛函分析解决. 事实上，对固定的 ω，$T(\omega, x) = T(\omega)x$ 化为普通的算子，有一般的处理方法. 因此，只要研究后一问题. 此外，我们还研究共轭变换是否随机的. 结果发现，问题的实质都归结为可测性. 然而，证明可测性并不常常容易.

本小节中，以 X，Z 表示 Banach 空间，X^*，Z^* 为其共轭空间，它们的闭集全体分别记为 C_x，C_z，C_x^*、C_z^*，包含全体闭集的最小 σ-代数分别记为 $\mathscr{B}_x$，$\mathscr{B}_z$，$\mathscr{B}_x^*$，$\mathscr{B}_z^*$. 又如 A 是闭集，则以 $\widetilde{A}$ 表示 A 的如下可列稠子集，使如零元 $\theta \in A$，则 $\theta \in \widetilde{A}$.（如果这种 $\widetilde{A}$ 存在）.

设 T 为 $\Omega \times Z—X$ 的线性有界随机变换，称 $\Omega \times X^*—Z^*$ 变换 T^* 为 T 的共轭变换，如对每 $\omega \in \Omega$，下二等式等价：

$$z^* = T^*(\omega, x^*),$$

$$x^*(T(\omega, z)) = z^*(z) \quad (\text{一切 } z \in Z).$$

作为初步，利用随机不动点原理，容易证明下列简单事实：如 $T(\omega, x)$ 为 $(\Omega, \sigma) \times X—X$（$SB$ 空间）上的线性压缩随机变换，则存在线性有界随机变换 S，它是随机变换 $T - I$ 的逆变换.

事实上，由泛函分析知 S 的存在，故只要证 S 的可测性. 为此，注意对固定的 $z \in X$，$\Omega—X$ 变换 $S(\omega, z)$ 是线性压缩随机变换 $T_z(\omega, x)(\omega \in \Omega, x \in X)$ 的随机不动点，这里

$$T_z(\omega, x) = T(\omega, x) - z \quad (\omega \in \Omega, x \in X).$$

由定理 3.1，此随机不动点是一随机元.

然而，下述更一般的定理 3.6 却不能由随机不动点原理推出：

定理 3.6 设 T 为 $\Omega \times Z—X$（B 空间）上的线性有界随机变换，这里 Z 是 SB 空间.

(A) 如果 T 可逆，则其 $\Omega \times X - Z$ 上的逆变换 S 也是线性有

界随机变换；

(B) 如果 Z^* 为可分的，则共轭变换 T^* 也是线性有界随机变换.

证 S 及 T^* 的线性及有界性均由泛函分析推出. 先证 S 为随机变换. 对每 $x \in X$, $A \in C_z$

$$\{\omega : S(\omega,x) \in A\} = \bigcup_{z \in A} \{\omega : S(\omega,x) = z\}$$
$$= \bigcup_{z \in A} \{\omega : T(\omega,z) = x\}. \qquad (3.8)$$

此 ω- 集等于

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{z \in \tilde{A}} \left\{\omega : T(\omega, z) \in O\left(x, \frac{1}{n}\right)\right\} \in \sigma, \qquad (3.9)$$

这里 $O(x,r)$ 表示以 x 为圆心，$r > 0$ 为半径的闭球. 实际上，如

$$\omega \in \bigcup_{z \in A} \{\omega : T(\omega, z) = x\},$$

则存在 $z_0 \in A$，使 $T(\omega, z_0) = x$，由 T 的有界性，

$$\| T(\omega, z) - x \| = \| T(\omega, z) - T(\omega, z_0) \|$$
$$\leqslant C(\omega) \| z - z_0 \|$$

对一切 $z \in Z$ 成立. 既然 $\tilde{A}$ 稠于 A，故对任意正整数*n，存在 $z \in \tilde{A}$，使 $T(\omega, z) \in O\left(x, \frac{1}{n}\right)$，从而

$$\omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{z \in \tilde{A}} \left\{\omega : T(\omega, z) \in O\left(x, \frac{1}{n}\right)\right\}.$$

反之，由上式知对每正整数 n，存在 $z_n \in \tilde{A}$，使 $\omega \in \left\{\omega : T(\omega, z_n) \in O\left(x, \frac{1}{n}\right)\right\}$，故

$$\| z_n - z_m \| = \| S(\omega,T(\omega,z_n)) - S(\omega,T(\omega,z_m)) \|$$
$$\leqslant \| S(\omega, \cdot) \| \cdot \| T(\omega,z_n) - T(\omega,z_m) + x - x \|$$
$$\leqslant \| S(\omega, \cdot) \| \cdot \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)$$

---

* 例如，任取 $z \in O\left(z_0, \frac{1}{(C(\omega)+1)n}\right) \cap \tilde{A} = \varnothing$ 即可.

这里 $\|S(\omega,\cdot)\|$ 表 ω 固定时算子 $S(\omega,\cdot)$ 的范，故存在 $z_0\in Z$ 使 $z_n\to z_0$. 既然 $z_n\in\widetilde{A}$，故 $z_0\in A$，因此

$$\omega\in\{\omega: T(\omega,z_0)=x\}\subset\bigcup_{z\in A}\{\omega: T(\omega,z)=x\}.$$

这样，证明了(3.8)式左端集与(3.9)中集的相等性，既然(3.9)中的集可测，于是得证对任意 $A\in C_z$，$\{\omega: S(\omega,x)\in A\}\in\sigma$，由此易知此关系式对任意 $A\in\mathscr{B}_z$ 也成立，因为 $\mathscr{B}_z=\sigma(C_z)$.

次证 T^* 为随机变换. 类似地，对每 $x^*\in X^*$，$A\in C_z^*$，有

$$\{\omega: T^*(\omega,x^*)\in A\}$$

$$=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{z^*\in\bar{A}}\left\{\omega: T^*(\omega,x^*)\in O\left(z^*,\frac{1}{n}\right)\right\}.$$

由共轭变换的定义，对每 $z^*\in Z^*$，$x^*\in X^*$，及正整数 n，

$$\left\{\omega: T^*(\omega,x^*)\in O\left(z^*,\frac{1}{n}\right)\right\}$$

$$=\bigcap_{z\in Z}\left\{\omega: |x^*(T(\omega,z))-z^*(z)|\leqslant\frac{1}{n}\|z\|\right\},$$

这等价于 $\bigcap_{z\in Z}\left\{\omega: |x^*(T(\omega,z))-z^*(z)|\leqslant\frac{1}{n}\|z\|\right\}$. 故对每 $x^*\in X^*$，$A\in C_z^*$，有

$$\{\omega: T^*(\omega,x^*)\in A\}$$

$$=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{z^*\in\bar{A}}\bigcap_{z\in z}\left\{\omega: x^*(T(\omega,z))\right.$$

$$\left.\in O\left(z^*(z),\frac{1}{n}\|z\|\right)\right\},$$

因此，如 T 为随机变换，则 T^* 也是随机变换. ∎

8.4 广义函数空间中的随机元

1. 基本概念

设 $R^k=(x)$ 为 k 维实数空间，$[a,b]$ 表示 R^k 中子集 $\{x: a_i\leqslant$

$x_i \leqslant b_i, i = 1, \cdots, k\}$. 对实数 $m > 0$，以$[-m, m]$表示点集$[x: -m \leqslant x_i \leqslant m, i = 1, \cdots, k\}$. 以 $\widetilde{P}$ 表示全体如下的 k 维向量 p 的集：$p = (p_1, p_2, \cdots, p_k)$，$p_i \geqslant 0$ 为整数. Φ 表示界定在 R^k 上的全体基本函数的集，称为基本空间（亦可采用其他基本空间，只要下面的定理 4.2 对它成立）. 函数 $\varphi(x)$ 称为基本的，如果它取复值；对任意 $p \in \widetilde{P}$，导数

$$D^p \varphi(x) = \frac{\partial^{p_1 + p_2 + \cdots + p_k}}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \cdots \partial x_k^{p_k}} \varphi(x)$$

存在；而且 $\varphi(x)$ 的支集是有界的. 所谓 $\varphi(x)$ 的支集是指点集 $(x: \varphi(x) \neq 0)$ 的闭包. 支集含于$[-m, m]$中的全体基本函数的集记作 Φ_m.

对每 $\varphi(x) \in \Phi$，令 $\|\varphi\| = \sup\limits_{x \in R^k} |\varphi(x)|$. 称基本函数列 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 $\varphi(x) \in \Phi$，并记为 $\varphi_n \to \varphi$，如果存在实数 $m > 0$，使每 $\varphi_n(x)$ 及 $\varphi(x)$ 的支集均含于$[-m, m]$中，而且对每 $p \in \widetilde{P}$，有 $\|D^p(\varphi_n - \varphi)\| \to 0 (n \to \infty)$. 集 $B \subset \Phi$ 称为有界的，如存在实数 $m > 0$，使 $B \subset \Phi_m$，而且对每 $\varphi(x) \in B$，$\|D^p \varphi\| \leqslant C_p$，这里 $C_p > 0$ 为不依赖于 $\varphi(x) (\in B)$ 的常数.

界定在 Φ 上的复值、线性、连续泛函 $F(\varphi)$ 称为广义函数. Φ 上全体广义函数所成的空间记作 T. 显然，关于常用的泛函（与函数）的加法运算和对复数的乘法运算，空间 T（及 Φ）是线性的.

称广义函数列 $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于泛函 F，并记为 $F_n \to F$，如对每 $\varphi \in \Phi$，数列 $F_n(\varphi) \to F(\varphi)$ $(n \to \infty)$.

我们要用到广义函数论中两个重要定理：

定理 4.1 （[2]，卷 2，第 91 页及第 76 页）. 设 $\{F_n\}_{n=1}^{\infty} \subset T$，$F_n \to F$，则 $F \in T$，而且此收敛在每一有界集 B 上是均匀的.

定理 4.2 （[9]）. 在 Φ 中存在可列子集 H，H 关于常用的函数加法成群，而且对每 $m > 0$ 及每 $\varphi \in \Phi_m$，存在 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Phi_m \cap H$，使 $\varphi_n \to \varphi$ $(n \to \infty)$.

本小节以后恒固定概率空间为(Ω, σ, ρ)，$\Omega = (\omega)$，并简称(Ω, σ, ρ)—$(E, \mathscr{B})$ 随机元为$(E, \mathscr{B})$ 中的随机元.

特别，可测复值函数空间$(A, \mathscr{A})$中的随机元$\eta(=\eta_x(\omega))$称为随机过程. 这里$A=(a(x))$为界定在R^k上全体复值函数$a(x)$的集，而$\mathscr{A}$为含下型a-集的最小σ-代数：

$$(a : \operatorname{Re} a(x) < c_1, \operatorname{Im} a(x) < c_2),$$

其中$x \in R^k$，$c_1 \in R^1$，$c_2 \in R^1$任意固定，Re及Im分别表实、虚部分. 容易看出，为使η为随机过程，必须也只需：

(i) 对每固定的$\omega \in \Omega$，η是$x \in R^k$的复值函数；

(ii) 对每固定的$x \in R^k$，η是复值随机变量.

实际上，条件(i)是显然的；其次，由σ-代数$\mathscr{A}$的定义，条件(ii)等价于映象η的可测性.

类似地，可测广义函数空间$(T, \mathscr{F})$中的随机元$\xi(=\xi_\varphi(\omega))$称为广义过程. 这里$\mathscr{F}$为含下型的$F(\in T)$-集的最小$\sigma$-代数：

$$F_{\varphi, c} = (F : \operatorname{Re} F(\varphi) < c_1, \operatorname{Im} F(\varphi) < c_2),$$

其中$\varphi \in \Phi$，$c_1 \in R^1$，$c_2 \in R^1$任意固定. 同样可证，为使ξ为广义过程，必须也只需

(Ⅰ) 对每固定的$\omega \in \Omega$，ξ是$\varphi \in \Phi$的广义函数；

(Ⅱ) 对每固定的$\varphi \in \Phi$，ξ是复值随机变量.

称广义函数$E\xi$为广义过程ξ的数学期望，如果对每$\varphi \in \Phi$，$[E\xi](\varphi) = E\xi(\varphi)$(这里$[E\xi](\varphi)$表示$E\xi$在$\varphi$上的值，而$E\xi(\varphi)$则表示随机变量$\xi(\varphi) = \xi_\varphi(\omega)$的数学期望).

容易证明：为使广义过程ξ的数学期望$E\xi$存在，必须也只需：对每$\varphi \in \Phi$，$E\xi(\varphi)$存在，而且对每列$\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Phi$，$\varphi_n \to 0$，有$\lim\limits_{n\to\infty} E\xi(\varphi_n) = 0$.

实际上，如果$E\xi$存在，由$E\xi$的定义$E\xi(\varphi)$存在；既然$E\xi$是广义函数，故$E\xi(\varphi_n) = [E\xi](\varphi_n) \to 0 (\varphi_n \to 0)$.

为证充分性. 定义泛函$E\xi$：$[E\xi](\varphi) = E\xi(\varphi)$，则

$$\begin{aligned}[E\xi](\varphi_1 + \varphi_2) &= E\xi(\varphi_1 + \varphi_2) \\ &= E(\xi(\varphi_1) + \xi(\varphi_2)) \\ &= E\xi(\varphi_1) + E\xi(\varphi_2) \\ &= [E\xi](\varphi_1) + [E\xi](\varphi_2).\end{aligned}$$

其次，如$\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\Phi$，$\psi_n\to\psi\in\Phi$，$\varphi_n=\psi_n-\psi\to 0$. 由$E\xi(\varphi_n)\to 0$，立得$E\xi(\psi_n)\to E\xi(\psi)$，即$[E\xi](\psi_n)\to[E\xi](\psi)$. 从而得证$E\xi$为广义函数.

2. 广义过程的条件数学期望

考虑概率空间(Ω,σ,P)及广义过程ξ. 又$\mathfrak{A}$为σ的某一子σ-代数. 本篇以后恒设P为完全的.

定义 4.1 界定在$\omega\in\Omega$，$\varphi\in\Phi$上的二元函数$E(\xi|\mathfrak{A})(=E(\xi|\mathfrak{A})=E(\xi|\mathfrak{A})(\omega,\varphi))$称为广义过程$\xi$关于$\mathfrak{A}$的条件数学期望，如果

(A) 它是一广义过程；关于$\mathfrak{A}'$可测，即对任意$D\in\mathscr{F}$，有$(\omega:E(\xi|\mathfrak{A})\in D)\in\mathfrak{A}'$；

(B) 对任意固定的$A\in\mathfrak{A}$，$\varphi\in\Phi$，有*

$$\int_A\xi(\varphi)P(\mathrm{d}\omega)=\int_A E(\xi|\mathfrak{A})(\varphi)P(\mathrm{d}\omega),$$

这里及今后以$\mathfrak{A}'$表示σ-代数，它由一切如下的集A构成：A与$\mathfrak{A}$中某一元的对称差是一测度为0的集(简称0测集).

定理 4.3 为使界定在$\omega\in\Omega$，$\varphi\in\Phi$上的二元函数$E(\xi|\mathfrak{A})$是ξ关于$\mathfrak{A}$的条件数学期望，必须也只需：

(a) 对任意固定的$\omega\in\Omega$，$E(\xi|\mathfrak{A})$是一广义函数；

(b) 对任意固定的$\varphi\in\Phi$，存在随机变量$\xi(\varphi)$关于$\mathfrak{A}$的条件数学期望$E(\xi(\varphi)|\mathfrak{A})$([12, 13])，使以概率1

$$E(\xi|\mathfrak{A})(\varphi)=E(\xi(\varphi)|\mathfrak{A}). \tag{4.1}$$

证 **必要性** 设$E(\xi|\mathfrak{A})$为ξ关于$\mathfrak{A}$的条件数学期望. 由定义4.1(A)得(a). 于(A)中取$D=F_{\varphi,c}$，由(A)得

$$(\omega:\operatorname{Re}E(\xi|\mathfrak{A})(\varphi)<c_1,\ \operatorname{Im}E(\xi|\mathfrak{A})(\varphi)<c_2)=$$
$$=(\omega:E(\xi|\mathfrak{A})\in F_{\varphi,c})\in\mathfrak{A}',$$

故$E(\xi|\mathfrak{A})(\varphi)$关于$\mathfrak{A}'$可测. 再由定理4.1(B)立知$E(\xi|\mathfrak{A})(\varphi)$为$\xi(\varphi)$关于$\mathfrak{A}$的一条件数学期望，故(b)成立.

---

* 积分按虚实部分别进行，以后同此.

充分性 设满足条件(a)(b)的函数$E(\xi|\mathfrak{A})$存在. 由广义过程的充要条件(Ⅰ)立得(B)，并知ω-集

$$\begin{aligned}&(\omega: E(\xi|\mathfrak{A}) \in F_{\varphi, c})\\&= (\omega: \mathrm{Re}\, E(\xi|\mathfrak{A})(\varphi) < c_1, \mathrm{Im}\, E(\xi|\mathfrak{A})(\varphi) < c_2)\end{aligned}$$

与ω-集

$$(\omega: \mathrm{Re}\, E(\xi(\varphi)|\mathfrak{A}) < c_1, \mathrm{Im}\, E(\xi(\varphi)|\mathfrak{A}) < c_2)$$

最多相差一0测集*，由$E(\xi(\varphi)|\mathfrak{A})$的定义知后一集属于$\mathfrak{A}'$，故$(\omega: E(\xi|\mathfrak{A}) \in F_{\varphi, c}) \in \mathfrak{A}'$. 一切满足关系式$(\omega: E(\xi|\mathfrak{A}) \in D) \in \mathfrak{A}'$的集$D(\subset T)$构成集$K$，显然，$K$是一$\sigma$-代数. K既含一切$F_{\varphi, c}$，而$\mathscr{F}$又是含一切$F_{\varphi, c}$的最小σ-代数，故$K \supset \mathscr{F}$，这表示$E(\xi|\mathfrak{A})$关于$\mathfrak{A}'$可测. 由此及(a)即得定义4.1(A). ∎

设$E(\xi|\mathfrak{A})$为ξ关于$\mathfrak{A}$的条件数学期望，又设广义过程$\tilde{E}(\xi|\mathfrak{A})$具有下列性质：存在$\omega$-集$A$，$P(A)=1$，使$\omega \in A$固定时，二广义函数$E(\xi|\mathfrak{A})$，$\tilde{E}(\xi|\mathfrak{A})$恒等(即对一切$\varphi \in \Phi$，$E(\xi|\mathfrak{A})$与$\tilde{E}(\xi|\mathfrak{A})$在$\varphi$上的值相同)，则$\tilde{E}(\xi|\mathfrak{A})$也是$\xi$关于$\mathfrak{A}$的条件数学期望. 这由定义4.1直接推出. 反之，设$E(\xi|\mathfrak{A})$及$\tilde{E}(\xi|\mathfrak{A})$均是$\xi$关于$\mathfrak{A}$的条件数学期望，则存在$\omega$-集$A$，$P(A)=1$，使$\omega \in A$固定时，二广义函数$E(\xi|\mathfrak{A})$，$\tilde{E}(\xi|\mathfrak{A})$恒等. 事实上，这里以及今后永以$H$表示$\Phi$中某一可列、稠密子集(不妨设$H$关于常用的函数加法成群，这并不影响可列性)，它的存在由定理4.2保证. 由定理4.3，对每$\varphi \in \Phi$，$E(\xi|\mathfrak{A})(\varphi)$及$\tilde{E}(\xi|\mathfrak{A})(\varphi)$均为$\xi(\varphi)$关于$\mathfrak{A}$的条件数学期望，故存在可测集$A_\varphi$，使$P(A_\varphi)=1$，当$\omega \in A_\varphi$时，有

$$E(\xi|\mathfrak{A})(\varphi) = \tilde{E}(\xi|\mathfrak{A})(\varphi), \tag{4.2}$$

令$A = \bigcap_{\varphi \in H} A_\varphi$，$P(A)=1$. 当$\omega \in A$固定时，上式对一切$\varphi \in H$成立. 由广义函数的连续性及$H$的稠密性，可见对每一固定的$\omega \in A$，(4.2)式对一切$\varphi \in \Phi$成立.

---

* 即对称差为0测集(注意P的完全性).

下面研究条件数学期望的存在性. 由定理 4.3, 自然地联想到 $E(\xi|\mathfrak{A})$ 非常类似于普通过程论中的条件分布([12], [13]). 既然后者的存在问题较为复杂, 故易想到 $E(\xi|\mathfrak{A})$ 也不会常常存在.

定理 4.4 为使 $E(\xi|\mathfrak{A})$ 存在, 必须也只需对每 $\varphi\in\Phi$, 存在 $E(\xi(\varphi)|\mathfrak{A})$, 满足下二条件:

C_1: 对任一列 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\Phi$, $\varphi_n\to 0$, 有 $P(\omega: \lim\limits_{n\to\infty}E(\xi(\varphi_n)|\mathfrak{A}) = 0) = 1$;

C_2: 存在 ω- 集 A, $P(A)=1$, 使 $\omega\in A$ 固定时, 对任一列 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}\subset H$, $\varphi_n\to 0$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}E(\xi(\varphi_n)|\mathfrak{A})=0$.

证　充分性　固定一族满足 C_1, C_2 的 $\{E(\xi(\varphi)|\mathfrak{A}), \varphi\in\Phi\}$. 因以概率 1,

$$
\begin{aligned}
&E(\xi(\varphi_1+\varphi_2)|\mathfrak{A})\\
&=E(\xi(\varphi_1)|\mathfrak{A})+E(\xi(\varphi_2)|\mathfrak{A})\ (\varphi_1, \varphi_2\in\Phi),
\end{aligned}
$$

故由 H 的可数性, 存在 ω- 集 C, $P(C)=1$, 使 $\omega\in C$ 固定时, 作为 φ 的函数, $E(\xi(\varphi)|\mathfrak{A})$ 在 H 上是线性的, 因而, 当 $\omega\in AC$ $(P(AC)=1)$ 固定时, $E(\xi(\varphi)|\mathfrak{A})$ 在 H 上是线性连续的. 于是, 可依连续性将它拓展到全 Φ 上, 同时保持在 Φ 上的线性与连续性. 今定义函数

$$
g(\omega,\varphi)=\begin{cases}0, & \text{如 } \omega\overline{\in} AC;\\ E(\xi(\varphi)|\mathfrak{A}), & \text{如 } \omega\in AC,\ \varphi\in H;\\ \lim\limits_{i\to\infty}E(\xi(\varphi_i)|\mathfrak{A}), & \text{如 } \omega\in AC,\ \varphi\in\Phi,\ \varphi\overline{\in} H,\\ & (\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}\subset H,\ \varphi_i\to\varphi)\end{cases}
\tag{4.3}
$$

后一极限显然不依赖于 $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的选择. 由定义立知: 对每固定的 $\omega\in\Omega$, $g(\omega,\varphi)$ 是一广义函数. 如能再验证定理 4.3 中条件 (b) 成立, 即可取 $g(\omega,\varphi)$ 为 $E(\xi|\mathfrak{A})$.

如 $\varphi\in H$ 固定, 由 (4.3) 及 $P(CD)=1$, 可见

$$g(\omega,\varphi)=E(\xi(\varphi)|\mathfrak{A})\ (a.\ s.),$$

$(a.s.)$表"关于P几乎处处成立". 故$g(\omega, \varphi)$是$\xi(\varphi)$，$\varphi \in H$，关于$\mathfrak{A}$的条件数学期望([12]).

如$\varphi \in \Phi$但$\varphi \overline{\in} H$固定，仍由(4.3)及C_1有

$$
\begin{aligned}
g(\omega, \varphi) &= \lim_{j\to\infty} E(\xi(\varphi_j) \mid \mathfrak{A}) \\
&= \lim_{j\to\infty} E(\xi(\varphi_j - \varphi) \mid \mathfrak{A}) + E(\xi(\varphi) \mid \mathfrak{A}) \\
&= E(\xi(\varphi) \mid \mathfrak{A}) \quad (a.s.).
\end{aligned}
$$

必要性 如$E(\xi \mid \mathfrak{A})$存在，取$E(\xi(\varphi) \mid \mathfrak{A}) = E(\xi \mid \mathfrak{A})(\varphi)$. 由于对每固定的$\omega \in \Omega$，广义函数$E(\xi \mid \mathfrak{A})$关于$\varphi \in \Phi$连续，故$C_1$，$C_2$均成立. ∎

系 4.1 为使$E(\xi \mid \mathfrak{A})$存在，必须而且只需存在$\{E(\xi(\varphi) \mid \mathfrak{A}), \varphi \in \Phi\}$以及$\omega$-集$A$，$P(A)=1$，使当$\omega \in A$固定时，对一切$\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \Phi$，$\varphi_j \to 0$，有$\lim_{j\to\infty} E(\xi(\varphi_j) \mid \mathfrak{A}) = 0$.

事实上，由系 4.1 之条件立知C_1，C_2二条件满足. 必要性之证完全与定理 4.4 中必要性之证相同.

系 4.1 中的充分与必要条件，形式上虽较简单，运用时却不方便，此由下系 4.2 之证可见.

系 4.2 设存在广义函数F，使对每$\varphi \in \Phi$，有$|\xi(\varphi)| \leqslant |F(\varphi)|$，$(a.s.)$，则$E(\xi \mid \mathfrak{A})$存在.

证 只要验证定理 4.4 中C_1，C_2满足. 首先，由$|\xi(\varphi)| \leqslant |F(\varphi)| (a.s.)$，$E\xi(\varphi)$存在，故$E(\xi(\varphi) \mid \mathfrak{A})$有意义，而且对任意$\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Phi$，$\varphi_n \to 0$，有

$$
\begin{aligned}
|E(\xi(\varphi_n) \mid \mathfrak{A})| &\leqslant E(|\xi(\varphi_n)| \mid \mathfrak{A}) \leqslant E(|F(\varphi_n)| \mid \mathfrak{A}) \\
&= |F(\varphi_n)| \to 0 \quad (a.s.).
\end{aligned}
$$

其次，存在ω-集A，$P(A)=1$，使$\omega \in A$时，对一切$\varphi_n \in H$，下三式同时成立：

$$
\begin{aligned}
&E(|F(\varphi_n)| \mid \mathfrak{A}) = |F(\varphi_n)|; \\
&E(|\xi(\varphi_n)| \mid \mathfrak{A}) \leqslant E(|F(\varphi_n)| \mid \mathfrak{A}) \\
&|E(\xi(\varphi_n) \mid \mathfrak{A})| \leqslant E(|\xi(\varphi_n)| \mid \mathfrak{A}).
\end{aligned}
$$

故当$\omega \in A$固定时，数列

$$|E(\xi(\varphi_n)|\mathfrak{A})| \leqslant E(|\xi(\varphi_n)||\mathfrak{A}) \leqslant E(|F(\varphi_n)||\mathfrak{A})$$
$$= |F(\varphi_n)| \to 0 \ (\varphi_n \in H, \varphi_n \to 0). \quad \blacksquare$$

今研究$E(\xi|\mathfrak{A})$的表现问题. 记$H = \{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$. 以$B_H$表示含下型$\omega$-集:$(\omega: \mathrm{Re}\,\xi(\varphi_j) < C_1, \mathrm{Im}\,\xi(\varphi_j) < C_2)$, $\varphi_j \in H$, $C_1 \in R^1$, $C_2 \in R^1$的最小σ-代数.

定理 4.5 设$E(\xi|\mathfrak{A})$存在,而且$\{\xi(\varphi_j)\}_{j=1}^{\infty}$的值域为Borel集(可列无穷维),则存在$\omega$-集$A$, $P(A) = 1$,使$\omega \in A$固定时,对一切$\varphi \in \Phi$有

$$E(\xi|\mathfrak{A})(\varphi) = \lim_{j\to\infty}\int_{\Omega}\xi(\psi_j, \omega')P(\mathrm{d}\omega', \omega), \tag{4.4}$$

这里$P(M, \omega)$当$\omega \in \Omega$固定时是B_H上的概率测度;$\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty} \subset H$, $\psi_j \to \varphi$.

证 取$P(M, \omega)$为$\{\xi(\varphi_j)\}_{j=1}^{\infty}$关于$\mathfrak{A}$的条件分布([12, 13]),则对$\varphi_i \in H$,有

$$E(\xi|\mathfrak{A})(\varphi_i) = E(\xi(\varphi_i)|\mathfrak{A})$$
$$= \int_{\Omega}\xi(\varphi_i, \omega')P(\mathrm{d}\omega', \omega) \ (a.\ s.),$$

故存在ω-集A, $P(A) = 1$,当固定$\omega \in A$时,对一切$\varphi_i \in H$同时有

$$E(\xi|\mathfrak{A})(\varphi_i) = \int_{\Omega}\xi(\varphi_i, \omega')P(\mathrm{d}\omega', \omega).$$

因此,由广义函数$E(\xi|\mathfrak{A})(\varphi)(\omega \in A$固定$)$关于$\varphi$的连续性及$H$的稠密性即得证(4.4). ■

如利用广义条件分布([12][13]),则无须$\{\xi(\varphi_j)\}_{j=1}^{\infty}$的值域为Borel集的假定,仍可得到$E(\xi|\mathfrak{A})$的积分表现,但那时积分将在无穷维空间中进行.

$E(\xi|\mathfrak{A})$具有下列性质,证明甚易,故从略.

(1) 如$\mathfrak{A} = (\varnothing, \Omega)$,则$E(\xi|\mathfrak{A}) = E(\xi) \ (a.\ s.)$;

(2) 如对每$\varphi \in H$, $\xi(\varphi) \geqslant 0 (a.s.)$,则$E(\xi|\mathfrak{A}) \geqslant 0 \ (a.s.)$;

(3) 如C_i为常数, ξ_i为广义过程, $i = 1, 2, \cdots, n$,则

$$E\left(\sum_{i=1}^{n}C_i\xi_i|\mathfrak{A}\right)=\sum_{i=1}^{n}C_iE(\xi_i|\mathfrak{A})\ (a.\ s.);$$

(4) 如 ξ 关于 $\mathfrak{A}'$ 可测，则 $E(\xi|\mathfrak{A})=\xi\ (a.\ s.)$；

(5) 如 $\mathfrak{A}_1\subset\mathfrak{A}_2\subset\mathscr{B}$，则 $E(E(\xi|\mathfrak{A}_1)|\mathfrak{A}_2)=E(\xi|\mathfrak{A}_1)=E(E(\xi|\mathfrak{A}_2)|\mathfrak{A}_1)\ (a.\ s.)$.

3. 极限定理

可测广义函数空间$(T,\mathscr{F})$中一切随机元ξ(亦即一切广义过程)构成集ϵ^*，称随机元列$\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛于$\xi\in\epsilon$，并记为$\xi_n\to\xi(a.s.)$，如存在ω-集A，$P(A)=1$，使$\omega\in A$固定时，广义函数列$\{\xi_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty}$收敛于广义函数$\xi(\omega)$.

定义 4.2 广义函数列$\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$称为在原点拟同等连续，如对任意$\varepsilon>0$及任一列$\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}\subset\Phi$，$\varphi_j\to0$，存在二正整数$N$及$M$，使对一切$n>N$，$j>M$，有$|F_n(\varphi_j)|<\varepsilon$.

定理 4.6 为使随机元列$\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$以概率1收敛于某随机元ξ，必须也只需

D_1. 对任意固定的$\varphi_j\in H$，随机变量列$\{\xi_n(\varphi_j)\}_{n=1}^{\infty}$以概率1收敛；

D_2. $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$以概率1在原点拟同等连续.

证　充分性　令

$$A=\bigcap_{\varphi_j\in H}(\omega:\{\xi_n(\varphi_j)\}_{n=1}^{\infty}\text{收敛})\cap(\omega:\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}\text{在原点拟同等连续}),$$

则$P(A)=1$. 令任意固定$\omega\in A$，对每$\varphi\in\Phi$，存在$\varphi_h\in H$，$h=1,2,\cdots$，$\varphi_h\to\varphi$，或$\varphi_h-\varphi\to0(h\to\infty)$，而且

$$|\xi_n(\varphi)-\xi_m(\varphi)|\leqslant|\xi_n(\varphi)-\xi_n(\varphi_h)|+|\xi_n(\varphi_h)-\xi_m(\varphi_h)|+|\xi_m(\varphi_h)-\xi_m(\varphi)|. \tag{4.5}$$

由于$\omega\in A$及D_2，对任意$\varepsilon>0$，存在$M>0$，$N>0$，使$n,m>N$，$h>M$时，上式右方第一项

---

* 请勿与通常使用的正数ε混淆.

$$|\xi_n(\varphi)-\xi_n(\varphi_h)|=|\xi_n(\varphi-\varphi_h)|<\frac{\varepsilon}{3},$$

同时也使第三项小于$\varepsilon/3$. 固定$h>M$. 由$\omega\in A$,存在$k>0$,使n, $m>k$时,第二项也小于$\varepsilon/3$. 故当n, m均大于$\max(k, N)$时,$|\xi_n(\varphi)-\xi_m(\varphi)|<\varepsilon$. 这表示数列$\{\xi_n(\varphi)\}_{n=1}^{\infty}$收敛,其中$\varphi\in\Phi$任意固定. 从而当$\omega\in A$固定时,广义函数列$\{\xi_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty}$收敛于某极限$\xi_0(\omega)$. 定义$\xi(\omega)$为

$$\xi(\omega)=\begin{cases}\xi_0(\omega), & \text{如 } \omega\in A;\\ 0, & \text{如 } \omega\overline{\in}A.\end{cases}$$

由定理4.1,可见当$\omega\in\Omega$固定时,$\xi(\omega)$是一广义函数,其次,既然随机变量列$\{\xi_n(\varphi)\}_{n=1}^{\infty}$以概率1收敛于$\xi(\varphi)$,故$\xi(\varphi)$也是一随机变量. 由8.3中第1小节立知$\xi\in\varepsilon$,从而$\xi_n\to\xi$ (a. s.).

必要性 D_1必要显然. 下证D_2必要. 设$\xi_n\to\xi$ (a. s.). 由定义知存在A, $P(A)=1$,当$\omega\in A$固定时,广义函数列$\{\xi_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty}$收敛于广义函数$\xi(\omega)$,由定理4.1,此收敛性关于$\varphi\in B$($B\subset\Phi$为任一有界集)是均匀的. 取$B=\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}\subset\Phi$, $\varphi_j\to 0$($j\to\infty$),则B必为有界集,故对任意$\varepsilon>0$,存在$N>0$,当$n>N$时,对一切$\varphi_j\in B$有

$$|\xi_n(\varphi_j)-\xi(\varphi_j)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

其次,由广义函数$\xi(\omega)$的连续性,存在$M>0$,使$j>M$时

$$|\xi(\varphi_j)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

因此,对一切$n>N$, $j>M$,有$|\xi_n(\varphi_j)|<\varepsilon$. 既然此性质对每$\omega\in A$成立,故得证$D_2$. ∎

现在应用定理4.6来研究独立随机元列与平稳随机元列的强大数定理.

称$\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\varepsilon$为独立的,如对任意正整数$m$,任意$E_j\in\mathscr{F}$, $j=1, 2, \cdots, m$,任一组正整数$i_1<i_2<\cdots<i_m$,有

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{m}\{\omega:\xi_{i_j}(\omega)\in E_j\}\right)=\prod_{j=1}^{m}P(\omega:\xi_{i_j}(\omega)\in E_j).$$

(4.6)

称$\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\epsilon$为平稳的，如对任意正整数$\tau$，有

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{m}\{\omega:\xi_{i_j+\tau}(\omega)\in E_j\}\right)$$

$$=P\left(\bigcap_{j=1}^{m}\{\omega:\xi_{i_j}(\omega)\in E_j\}\right). \tag{4.7}$$

以上独立性与平稳性的定义均已在[10]中给出.

今定义随机元$\xi\in\epsilon$的方差为

$$D\xi=\int_{\Omega}\sup_{\varphi\in\Phi}|\xi(\varphi)-E\xi(\varphi)|^2P(\mathrm{d}\omega)$$

$$=\int_{\Omega}\sup_{\varphi\in\Phi}|\xi(\varphi)-E\xi(\varphi)|^2P(\mathrm{d}\omega),$$

只要上式中所用到的积分收敛.

定理 4.7 设$\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\epsilon$为独立随机元列，而且$E\xi_n=0$，$n=1,2,\cdots$，则为使随机元列

$$\zeta_j=\frac{1}{j}\sum_{n=1}^{j}\xi_n\to 0\ (a.\ s.)\ (j\to\infty),$$

只需

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{D\xi_n}{n^2}<\infty$;

2) $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$以概率1在原点拟同等连续.

证 对任意固定的$\varphi\in\Phi$，令$E_j=F_{\varphi,c_j}$，代入(4.6)即得随机变量列$\{\xi_n(\varphi)\}_{n=1}^{\infty}$的独立性. 由1)知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{D\xi_n(\varphi)}{n^2}<\infty$，故由独立随机变量列的Колмогоров强大数定理得$\zeta_j(\varphi)\to 0$ (a. s.). 如能证明$\{\zeta_j\}_{j=1}^{\infty}$以概率1在原点拟同等连续，则由定理4.6即得$\zeta_j\to 0(a.s.)$. 由条件2)，存在$\omega$-集$A$，$P(A)=1$，使$\omega\in A$固定时，广义函数列$\{\xi_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty}$在原点拟同等连续. 今证对此$\omega$，$\{\zeta_j(\omega)\}_{j=1}^{\infty}$也在原点拟同等连续. 任取$\epsilon>0$及$\{\varphi_m\}\subset\Phi$，$\varphi_m\to 0$，

由假设存在二整数 $N>0$，$M>0$，使 $n>N$，$m>M$ 时，

$$|\xi_n(\varphi_m)|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.8}$$

其次，由于 $\xi_n(\varphi)(n=1,\cdots,N)$ 都是广义函数而且 $\varphi_m\to 0$，故存在整数 $L>0$，当 $m>L$ 时

$$|\xi_n(\varphi_m)|<\frac{\varepsilon}{2}\qquad(n=1,2,\cdots,N). \tag{4.9}$$

因此，当 $j>N$，$m>\max(L,M)$ 时，由(4.8)(4.9)得

$$|\zeta_j(\varphi_m)|=\frac{1}{j}\Big|\sum_{n=1}^{j}\xi_n(\varphi_m)\Big|$$

$$\leqslant\frac{1}{j}\sum_{n=1}^{N}|\xi_n(\varphi_m)|+\frac{1}{j}\sum_{n=N+1}^{j}|\xi_n(\varphi_m)|<\varepsilon.$$ ∎

二 ω- 集 A_1，A_2 称为对等的，并记为 $A_1\approx A_2$，如果它们最多相差一 0 测集.

设 $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\varepsilon$ 为平稳随机元列，它所产生的 σ- 代数记为 $\mathscr{B}_\xi$，换言之，$\mathscr{B}_\xi$ 为含下型 ω- 集

$$(\omega:\xi_n(\omega)\in E)\qquad(n=1,2,\cdots,E\in\mathscr{F})$$

的最小 σ- 代数. 由平稳性，$\{\xi_n\}$ 在 $\mathscr{B}'_\xi$ 上决定唯一具有下性质的保测度集变换 T_ξ：对任意正整数 n，任意 $E^{(n)}\in\mathscr{F}^n$($\mathscr{F}^n=\mathscr{F}\times\mathscr{F}\times\cdots\times\mathscr{F}$，$n$ 次)，

$$T_\xi(\omega:\{\xi_1(\omega),\cdots,\xi_n(\omega)\}\in E^{(n)})$$

$$\approx(\omega:\{\xi_2(\omega),\cdots,\xi_{n+1}(\omega)\}\in E^{(n)}), \tag{4.10}$$

其证明完全与平稳随机变量序列情况一样([12]).

集 $A\in\mathscr{B}'_\xi$ 称为关于 $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为不变的，如 $T_\xi A\approx A$. 全体不变集构成一 σ- 代数 U_ξ，$U_\xi\subset\mathscr{B}'_\xi$.

固定 $\varphi\in\Phi$. 于(4.7)中取 $E_i=F_{\varphi,c_i}$，$i=1,2,\cdots,m$，立见随机变量列 $\{\xi_n(\varphi)\}_{n=1}^{\infty}$ 是平稳的，以 $\mathscr{B}_\varphi$ 表示含下型 ω- 集

$$(\omega:\operatorname{Re}\xi_n(\varphi)<C_1,\ \operatorname{Im}\xi_n(\varphi)<C_2)$$

$$(C_1\in R^1,\ C_2\in R^1)$$

的最小 σ- 代数，由通常的关于平稳随机变量序列的理论([12])，$\{\xi_n(\varphi)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $\mathscr{B}'_\varphi$ 上决定唯一具有下列性质的保测度集变换 T_φ：

$$T_\varphi(\omega: \{\operatorname{Re}\xi_1(\varphi), \operatorname{Im}\xi_1(\varphi), \cdots,$$
$$\operatorname{Re}\xi_n(\varphi), \operatorname{Im}\xi_n(\varphi)\} \in A_{2n})$$
$$\approx (\omega: \{\operatorname{Re}\xi_2(\varphi), \operatorname{Im}\xi_2(\varphi), \cdots,$$
$$\operatorname{Re}\xi_{n+1}(\varphi), \operatorname{Im}\xi_{n+1}(\varphi)\} \in A_{2n}\}, \tag{4.11}$$

其中 A_{2n} 为任意 $2n$ 维 Borel 集，$n = 1, 2, \cdots$.

另方面，因 $\mathscr{B}'_\varphi \subset \mathscr{B}'_\xi$，故 T_ξ 在 $\mathscr{B}'_\varphi$ 上派生一保测度集变换 $\widetilde{T}_\varphi: \widetilde{T}_\varphi A = T_\xi A, A \in \mathscr{B}'_\varphi$. 由(4.10)易见 $\widetilde{T}_\varphi$ 也具有(4.11)中的性质(因由 $\mathscr{F}$ 的定义，易证(4.11)左方的 ω-集可表示为形如 $(\omega: \{\xi_1(\omega), \cdots, \xi_n(\omega)\} \in E_\varphi^{(n)})$，$E_\varphi^{(n)} \in \mathscr{F}^n$. 既然具此性质的保测度集变换唯一，故 T_φ 与 $\widetilde{T}_\varphi$ 重合.

关于 T_φ 不变的集所成的 σ-代数记为 U_φ. 可证 $U_\varphi = U_\xi \cap \mathscr{B}'_\varphi$. 实际上，如 $A \in U_\xi \cap \mathscr{B}'_\varphi$，则 $T_\varphi A = \widetilde{T}_\varphi A = T_\xi A \approx A$，故 $A \in U_\varphi$；反之，如 $A \in U_\varphi$，则 $A \in \mathscr{B}'_\varphi$，而且 $T_\xi A = \widetilde{T}_\varphi A = T_\varphi A \approx A$，故 $A \in U_\xi$，因此 $A \in U_\xi \cap \mathscr{B}'_\varphi$.

定理 4.8* 设 $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty \subset \epsilon$ 为平稳随机元列，$E\xi_1$ 存在，而且以概率 1 在原点拟同等连续，则

$$\zeta_j = \frac{1}{j}\sum_{n=1}^{j}\xi_n \to E(\xi_1 | U_\xi) \ (a.\ s.).$$

证 对每 $\varphi \in \Phi$，由假设 $E\xi_1(\varphi)$ 存在，又 $\{\xi_n(\varphi)\}_{n=1}^\infty$ 为平稳随机变量序列，故由 Birkhoff-Хинчин 定理([12])

$$\zeta_j(\varphi) \to E(\xi_1(\varphi) | U_\varphi) \ (a.\ s.). \tag{4.12}$$

其次，在证定理 4.7 时已证明 $\{\zeta_j\}_{j=1}^\infty$ 以概率 1 在原点拟同等连续，故由定理 4.6，存在 $\xi \in \epsilon$，使

$$\zeta_j \to \xi \ (a.\ s.).$$

固定 $\varphi \in \Phi$. 由(4.12)可见 $\xi(\varphi) = E(\xi_1(\varphi) | U_\varphi)(a.\ s.)$，既然 $U_\varphi \subset U_\xi$，故 $\xi(\varphi)$ 关于 U'_ξ 可测. 如能再证明对任意 $A \in U_\xi$，有

$$\int_A \xi(\varphi) P(\mathrm{d}\omega) = \int_A \xi_1(\varphi) P(\mathrm{d}\omega),$$

---

* [10] 中证明了 $\{\zeta_n\}_{n=1}^\infty$ 有极限而未求出.

则由定理 4.3 即得证本定理(附带证明了 $E(\xi_1|U_\xi)$ 存在).

为此，以$\tilde{\eta}$ 表示复数 η 的实部(或虚部)，注意 A 关于 T_ξ 的不变性以及 $T_\xi C = T_\varphi C$ $(C \in \mathscr{B}'_\varphi)$ 得

$$\begin{aligned}
&\int_A \xi_1(\varphi)P(\mathrm{d}\omega) \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{k}{2^n}P\left(\left\{\frac{k}{2^n}\leqslant\tilde{\xi}_1(\varphi)<\frac{k+1}{2^n}\right\}\cap A\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{k}{2^n}P\left(T_\xi^j\left\{\frac{k}{2^n}\leqslant\tilde{\xi}_1(\varphi)<\frac{k+1}{2^n}\right\}\cap T_\xi^j A\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{k}{2^n}P\left(\left\{\frac{k}{2^n}\leqslant\tilde{\xi}_{j+1}(\varphi)<\frac{k+1}{2^n}\right\}\cap A\right) \\
&= \int_A \tilde{\xi}_{j+1}(\varphi)P(\mathrm{d}\omega) = \int_A \tilde{\zeta}_j(\varphi)P(\mathrm{d}\omega) \to \int_A \tilde{\xi}(\varphi)P(\mathrm{d}\omega).
\end{aligned}$$

这里可在积分号下取极限是由于$\tilde{\zeta}_j(\varphi), j\geqslant 1$ 的均匀可积性[12].

∎

参考文献

[1] Schwartz L. Theórie des distributions. 1950.

[2] Гельфанд И М. , Шилов Г Е. Обобщенные функции. 1960, Вып. 1; 1958, Вып. 2.

[3] 冯康. 广义函数论. 数学进展，1955，1(3)

[4] Гельфанд И М. , Обобщенные случайные процессы. ДАН СССР, 1955, 100: 853～856

[5] Ito K. Stationary random distributions. Mem. Col. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A, 1954, 28: 209～223

[6] Урбаник К. Случайные процессы, реализации которых являются обобщенными функциями. Теор. вероят. и ее прим. 1956, 1, вып. 1: 146～148

[7] 郑绍濂. 正则与奇异的平稳广义随机过程. 科学纪录，1959，3(8):

281～286

[8] Mikusinski J. , Sikorski. The elementary theory of distributions(I). 1957.

[9] Winkelbauer K. К теории обобщенных случайных процессов. Чехословский Мат. Журнал. , 1956, 6: 517～521

[10] Ullrich M. Some theorems on random Schartz Distributions. Trans. of the 1-st Prague conference, Information theory,etc. , 1956, 273～291

[11] 伊藤清. 确率过程[1]. (汉译本:伊藤清. 随机过程. 刘璋温译. 上海:上海科技出版社. 1961.).

[12] Doob J L. Stochastic processes. New York:Wiley & Sons,1953.

[13] Loève M. Probability theory. Springer-Verlag,1955.

[14] Bharucha-Reid A T. On random solutions of integral equations in Banach Space. Trans. of the second Prague conference on information theory, etc. , 1960, 27～48

[15] Hanš O. Generalized random variables. Trans. of the first Prague conference on information theory, etc. , 1957, 61～103

[16] Hanš O. Random fixed point theorems. (同上), 1957, 127～133

[18] Hanš O. Measurability of extensions of continuous random transforms. Annals of Math. Statistics, 1959, 30: 1152～1157

[19] Mourier E. Éléments aléatoires dans un espace de Banach. Annales de l'Istitut Henri Poincaré, 1953, 13: 161～244

[20] Прохоров Ю В. Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей. Теор. вероят. и ее прим. 1956, 1(2): 177～238

[21] 郑曾同. 测度的弱收敛与强马氏过程. 数学学报, 1961, 11: 126～132

[22] Dubins L E. Generalized random variables. Trans. of the Amer. Math. Soc. 1957, 84: 273～309

[23] 王寿仁. 关于广义随机过程的一个注记. 科学纪录, 1958, 2(1): 15～17

[24] Driml M. , Hans O. Conditional expectations for generalized random variables. Trans. of the second Prague conference on information theory, etc. , 1960, 123～144

[25] 关肇直, 泛函分析讲义. 北京: 高等教育出版社, 1958.

[26] Nedoma J. Note on generalized random variables. Trans. of the first Prague conference on information theory, etc. , 1957, 139～141

[27] Halmos P R. Measure theory. New York, 1950. (汉译本:P R Halmos. 测度论. 王建华译. 北京:科学出版社, 1958).

第 3 卷

马尔可夫过程的通性

本卷研究一般的马尔可夫过程的通性. 含第9篇至第15篇共7篇.

第9篇研究马尔可夫过程的零壹律. 虽然零壹律的概念早已有之，但本篇却是首次明确地提出无穷近零壹律和无穷远零壹律的概念，并且加以系统地研究. 本篇中研究了马尔可夫过程无穷远(近)零壹律成立的充分必要条件，讨论了无穷远零壹律与常返性之间的联系，无穷近零壹律与强马尔可夫性之间的联系，以及全体尾事件的刻划.

第10篇研究常返马尔可夫过程的性质，得到了过程常返的用过份函数表述的充分必要条件，过程的强零壹律成立的用有界调和函数表述的充分必要条件，并将所得的结果应用于椭圆型偏微分方程的研究中.

第 11 篇研究非常返马尔可夫过程，即暂留马尔可夫过程. 由于暂留马尔可夫过程随着时间的无限推移将趋于无穷远，本篇研究过程趋于无穷远的方式. 证明了一个很有趣的性质：在一定条件下，过程必须通过一切方向绕无穷远点作无穷次徘徊后方趋于无穷远.

第 12 篇研究扩散过程，找到了扩散过程在随机时间替换下仍然是扩散过程的充分必要条件.

第 13 篇研究 Martin 边界和过份函数的极限定理. 对于生灭过程，每个过份函数 u 有极限$\lim\limits_{i\to\infty}u(i)$. 本篇研究一般的马尔可夫链的过份函数的极限性状. 首先，给出了离散参数马尔可夫链的 Martin 边界理论概要. 然后，证明暂留马尔可夫链的过份函数在 F 意义下收敛，且找到了极限的确切值. 为了讨论 F 收敛与通常收敛的关系，引进了原子核的概念. 在原子核的情形，F 收敛化为通常的收敛. 例如，双边生灭过程的嵌入马尔可夫链至多有 2 个原子核，对应的收敛分别为$i\to-\infty$和$i\to+\infty$. 最后，将结论应用于连续参数可列马尔可夫过程，主要研究积分型泛函，而且在双边生灭过程的情形得到了详细的研究.

第 14 篇研究了马尔可夫过程的某些联合分布. 具体地说，过程的停时 h，过程在停时 h 的位置 $x(h)$，协停时 l，过程在协停时 l 的位置 $x(l)$ 四者的联合分布，并将结论应用于 $d(\geqslant 3)$ 维布朗运动，求出了对称稳定过程首出球点与末离球点的联合分布密度.

第 15 篇是作者从事地震的概率预测时的理论研究成果. 作者从理论上研究了地极移动(钱德勒摆动) 的数学模型 —— 随机微分方程模型. 首先，求出了地极移动方程的解. 然后，证明此解是二维的正态、平稳、马尔可夫过程，它具有遍历性，并找出了该过程的转移概率密度及相关函数. 最后，研究了地极移动模型的最佳预测公式和预测误差.

第 9 篇　马尔可夫过程的零壹律

本篇的目的是研究马尔可夫过程(简称马氏过程)零壹律成立的充分与必要条件，并给出一些便于运用的充分条件. 独立随机变量序列的零壹律及其重要性是人所共知的[7]. 近来在马氏过程的研究中也常常出现概率只能是 0 或 1 的事件，它们大致可以分成无穷近的与无穷远的两种，作为前者与后者的例可分别见[6]中 § Ⅱ. 11 的定理 3 及 § Ⅱ. 10 的定理 4. 然而目前已有的结果大多是利用特殊的条件分别证明的，因此有一般处理的必要. 看来，关于齐次马氏过程无穷近零壹律的第一个一般性结果属于[3]，它给出此律成立的充分条件，这结果稍许变形后重述于[8]，并推广到非齐次场合(参看下列定理 1.2). 零壹律的各种应用可见[1，2，4，5，9，10].

我们考虑的马氏过程是有任意状态空间的，一般未必是齐次的. 全篇分成三节. 9.1 中得到了无穷近零壹律成立的两个充分与必要条件. 在此基础上得到了一些简便的充分条件，例如证明了：具可列多个状态的马氏过程必使此律成立，只要满足常见的标准性条件(1.17)或(1.17)′，然后讨论了此律与强马尔可夫性的关系. 9.2 中找到了无穷远零壹律成立的充分与必要条件，并刻画了全体尾事件. 9.3 专论齐次马氏过程，其中证明了：通常文献中所见的常返型马氏过程都使无穷远零壹律成立；然后利用 Blackwell 的理论来研究条件零壹律.

9.1、9.3 节中附有简单的例，其中包含[6]中一个结论的反例.

9.1 无穷近零壹律

采用[8]中马氏过程的定义但只考虑不断的马氏过程，设已给基本事件空间 $\Omega=(\omega)$ 及可测空间 $(E,\mathscr{B})$，σ 代数 $\mathscr{B}$ 包含一切单点集；对一切 $\omega\in\Omega$，$t\geqslant 0$，取值于 E 中的函数 $x(t,\omega)\equiv x_t(\omega)$ 有定义；对每一 $0\leqslant s\leqslant t$，设已给 Ω 中的 σ 代数 $\mathscr{M}_t^s$ 及 σ 代数 $\mathscr{M}^s$，$\mathscr{M}^s\supseteq\mathscr{M}_t^s$，$t\geqslant s$；最后，对每一 $s\geqslant 0$，$x\in E$，已给 $\mathscr{M}^s$ 上的概率测度 $P_{s,x}$. 我们说，这些元素定义马氏过程 $X=(x_t,\mathscr{M}_t^s,P_{s,x})$，如果

(A) 对任意 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant u$，$\Gamma\in\mathscr{B}$，有

$$\{x_t\in\Gamma\}\in\mathscr{M}_t^s\subseteq\mathscr{M}_u^s;$$

(B) 定义转移函数

$$p(s,x;t,\Gamma)=P_{s,x}(x_t\in\Gamma)\quad(0\leqslant s\leqslant t,\Gamma\in\mathscr{B}),\tag{1.1}$$

则 $p(s,x;s,E\backslash x)=0$ 而且 $p(s,x;t,\Gamma)$ 是 x 的 $\mathscr{B}$ 可测函数(在目前情况下，有 $p(s,x;s,\{x\})=1$)；

(C) 马氏性成立：对 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant u$，$x\in E$，$\Gamma\in\mathscr{B}$，有

$$P_{s,x}\{x_u\in\Gamma|\mathscr{M}_t^s\}=p(t,x_t;u,\Gamma)\quad(P_{s,x}).\tag{1.2}$$

记号 $(P_{s,x})$ 表示关于测度 $P_{s,x}$ 几乎处处.

以 $\mathscr{F}\{x_u,u\in T\}$ 记 Ω 中含一切 $\{x_u\in\Gamma\}(u\in T,\Gamma\in\mathscr{B})$ 的最小 σ 代数，令

$$N_t^s=\mathscr{F}\{x_u,s\leqslant u\leqslant t\},\ N_t=N_t^0;$$

$$N^s=\mathscr{F}\{x_u,s\leqslant u\}.$$

对 $\mathscr{B}$ 上任一有穷测度 μ，积分

$$P_{s,\mu}(A)=\int_E P_{s,x}(A)\mu(\mathrm{d}x)\quad(A\in N^s)\tag{1.3}$$

定义 N^s 上的一测度 $P_{s,\mu}$; 令 $A\in\overline{N}^s$, 如对 $\mathscr{B}$ 上每一有穷测度 μ, 存在 $A_1\in N^s$, $A_2\in N^s$, 使 $A_1\subseteq A\subseteq A_2$ 而且 $P_{s,\mu}(A_1)=P_{s,\mu}(A_2)$. $\overline{N}^s\supseteq N^s$. 对 $A\in\overline{N}^s$, 定义 $P_{s,\mu}(A)=P_{s,\mu}(A_1)$, 则 $P_{s,\mu}$ 延拓到 $\overline{N}^s$ 上.

令 $A\in\mathscr{M}^s_{t+0}$, 如 $A\in\mathscr{M}^s_v$ 对一切 $v>t$ 成立. 显然 $\mathscr{M}^s_t\subseteq\mathscr{M}^s_{t+0}=\bigcap\limits_{v>t}\mathscr{M}^s_v$.

重要的是 Ω 中的 σ 代数 $\overline{N}^s\cap\mathscr{M}^s_{s+0}$. 直观地说, 它可看成距 s 无穷近将来中的事件所成的 σ 代数.

我们说, 对马氏过程 X 无穷近零壹律成立, 如果对任意 $s\geqslant 0$, $x\in E$ 及 $A\in\overline{N}^s\cap\mathscr{M}^s_{s+0}$, 有 $P_{s,x}(A)=0$ 或 1.

定理 1.1 对马氏过程 $X=(x_t,\mathscr{M}^s_t,P_{s,x})$, 下列二条件中的任何一个都是无穷近零壹律成立的充要条件:

(A) 对任意 $0\leqslant s<u$, $\Gamma\in\mathscr{B}$, 存在一列 $\{t_n\}$, $t_n\downarrow s$, 使对一切 $x\in E$, 有*

$$P_{s,x}\lim_{t_n\downarrow s}p(t_n,x_{t_n};u,\Gamma)=p(s,x;u,\Gamma).$$

(B) $\tilde{X}=(x_t,\mathscr{M}^s_{t+0},P_{s,x})$ 是马氏过程.

证 对任意 $0\leqslant s\leqslant v_n<u$, $\Gamma\in\mathscr{B}$, $x\in E$, 有

$$P_{s,x}(x_u\in\Gamma\,|\,\mathscr{M}^s_{v_n})=p(v_n,x_{v_n};u,\Gamma)\quad(P_{s,x}).\tag{1.4}$$

任取一列 $\{v_n\}$ 使 $v_n\downarrow r\geqslant s$, 由 Martingale 收敛定理[6], 可见存在极限

$$\lim_{v_n\downarrow r}P_{s,x}(x_u\in\Gamma\,|\,\mathscr{M}^s_{v_n})=P_{s,x}(x_u\in\Gamma\,|\,\mathscr{M}^s_{r+0})\quad(P_{s,x}),$$

故由(1.4)知, 对任一列 $\{v_n\}$, $v_n\downarrow r$, 存在极限 $\lim\limits_{v_n\downarrow r}p(v_n,x_{v_n};u,\Gamma)$ 而且

$$P_{s,x}(x_u\in\Gamma\,|\,\mathscr{M}^s_{r+0})=\lim_{v_n\downarrow r}p(v_n,x_{v_n};u,\Gamma)\quad(P_{s,x}).\tag{1.5}$$

---

* 记号 $P_{s,x}\lim$ 表示依测度 $P_{s,x}$ 收敛. 条件(B)的充分性已在[8]5.21段中提出.

对任意 $\varepsilon>0$ 及 $0\leqslant s\leqslant r\leqslant t\leqslant u$，有

$$
\begin{aligned}
&P_{s,y}(|p(t,x_t;u,\Gamma)-p(r,x_r;u,\Gamma)|>\varepsilon)\\
&=\int_\Omega P_{s,x}(|p(t,x_t;u,\Gamma)-p(r,x_r;u,\Gamma)|\\
&\quad>\varepsilon|\mathscr{M}_r^s)P_{s,x}(\mathrm{d}\omega)\\
&=\int_\Omega P_{r,x_r}(|p(t,x_t;u,\Gamma)-p(r,x_r;u,\Gamma)|\\
&\quad>\varepsilon)P_{s,x}(\mathrm{d}\omega)\\
&=\int_E P_{r,y}(|p(t,x_t;u,\Gamma)-p(r,y;u,\Gamma)|\\
&\quad>\varepsilon)p(s,x;r,\mathrm{d}y).
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

今设(A)成立. 对任意 $r<u$，$\Gamma\in\mathscr{B}$，必存在一列 $\{r_n\}$，$r_n\downarrow r$，使对一切 $y\in E$，有

$$\lim_{r_n\downarrow r}P_{r,y}(|p(r_n,x_{r_n},u,\Gamma)-p(r,y,u,\Gamma)|>\varepsilon)=0.$$

取(1.6)中的 t 为 r_n，由上式及(1.6)并用积分控制收敛定理，即得

$$P_{s,x}\lim_{r_n\downarrow r}p(r_n,x_{r_n},u,\Gamma)=p(r,x_r,u,\Gamma).\tag{1.7}$$

由于(1.5)中 $\{v_n\}$ 是任一列满足 $v_n\downarrow r$ 的序列，特别可取 $v_n=r_n$；比较(1.5)、(1.7)，并注意依测度收敛极限的唯一性，可见

$$P_{s,x}(x_u\in\Gamma|\mathscr{M}_{r+0}^s)=p(r,x_r;u,\Gamma)\quad(P_{s,x})\tag{1.8}$$

对任意 $0\leqslant s\leqslant r<u$，$\Gamma\in\mathscr{B}$，$x\in E$ 成立. 如果 $r=u$，(1.8)式仍然正确，因为这时双方都等于 $\chi_\Gamma(x_r)$，$(P_{s,x})$. 这里 $\chi_\Gamma(y)$ 表示 Γ 的特征函数，即 $\chi_\Gamma(y)$ 等于1或0视 $y\in\Gamma$ 或 $y\overline{\in}\Gamma$ 而定. 于是(B)得证.

今由(B)证无穷近零壹律成立，此证已在[8]定理5.11的系中给出，故从略.

现在设无穷近零壹律成立而证(A). 令 $N_{s+0}^s=\bigcap_{t>s}N_t^s$，显然 $N_{s+0}^s\subseteq\overline{N}^s\cap\mathscr{M}_{s+0}^s$. 在证明(1.5)时，已证明对任一列 $t_n\downarrow s$，$s<u$，存在极限 $\lim_{t_n\downarrow s}p(t_n,x_{t_n};u,\Gamma)(P_{s,x})$，在它无定义的点上补定义为0后，这极限显然应为 $N_{t_n}^s$ 可测，一切 n；因而必然也是 N_{s+0}^s

$=\bigcap_n N_{t_n}^s$ 可测的，更是 $\overline{N}^s \cap \mathscr{M}_{s+0}^s$ 可测的．既然由假设 $\overline{N}^s \cap \mathscr{M}_{s+0}^s$ 只含 $P_{s,x}$ 测度为 0 或 1 的集，故存在与 ω 无关的常数 c，使

$$\lim_{t_n \downarrow s} p(t_n, x_{t_n}; u, \Gamma) = c \quad (P_{s,x}). \tag{1.9}$$

剩下只要证 $c = p(s, x; u, \Gamma)$．为此，利用马氏性及(1.9)得

$$\begin{aligned} p(s, x; u, \Gamma) &= P_{s,x}(x_u \in \Gamma) = P_{s,x}(x_s = x, x_u \in \Gamma) \\ &= \int_{(x_s = x)} p(t_n, x_{t_n}; u, \Gamma) P_{s,x}(\mathrm{d}\omega) \\ &\to \int_{(x_s = x)} c P_{s,x}(\mathrm{d}\omega) = c, \end{aligned}$$

故 $p(s, x; u, \Gamma) = c$． ∎

实际上我们证明了更多的事实，由(1.5)，(1.7)可见，对 $s \leqslant r < u$，$\Gamma \in \mathscr{B}$ 及任一列 $v_n \downarrow r$ 有

$$\lim_{v_n \downarrow r} p(v_n, x_{v_n}; u, \Gamma) = p(r, x_r; u, \Gamma) \quad (P_{s,x}). \tag{1.10}$$

特别，令 $r = s$，得知条件(A)等价于

(A[1]) 对任一列 $v_n \downarrow s$，下式对一切 $x \in E$，$\Gamma \in \mathscr{B}$，$u > s$ 成立：

$$\lim_{v_n \downarrow s} p(v_n, x_{v_n}; u, \Gamma) = p(s, x; u, \Gamma) \quad (P_{s,x}). \tag{1.11}$$

如果 $\{x_t, t \geqslant 0\}$ 是独立随机过程，那么它也是马氏过程而且 $p(s, x; u, \Gamma)$ 与 s，x 无关($u > s$)，故(A)恒满足且无穷近零壹律成立．

今将相空间特殊化为拓扑可测空间$(E, C, \mathscr{B})$，其中(E, C)为拓扑空间而$(E, \mathscr{B})$为可测空间．称拓扑可测空间为 μ- 空间，如果 $\mathscr{B}$ 是开集系 C 的某子系所产生的 σ 代数，而且对每一 $U \in \mathscr{B} \cap C$，存在 $\mathscr{B}$ 可测的连续函数 $f(x)$，使当而且只当 $x \in U$ 时 $f(x) \neq 0$．

取值于 μ- 空间的马氏过程 X 称为几乎右连续的，如对任意

的 $0 \leqslant s \leqslant r$，$x \in E$，存在一列 $t_n \downarrow r$，使几乎处处

$$\lim_{t_n \downarrow r} x_{t_n}(\omega) = x_r(\omega) \quad (P_{s,x}). \tag{1.12}$$

以 $H_1(H_2)$ 表示定义在$(E, C, \mathscr{B})$上的有界 $\mathscr{B}$ 可测函数（有界连续 $\mathscr{B}$ 可测函数）全体，显然 $H_2 \subseteq H_1$. 对 $f \in H_1$，定义

$$F(r, y) = \int_E p(r, y; u, \mathrm{d}z) f(z), \tag{1.13}$$

$F(r, y)$ 当然也依赖于 u 及 f. 如转移函数 $p(s, x; u, \Gamma)$ 是齐次的，即如满足

$$p(s, x; s+t, \Gamma) = p(0, x; t, \Gamma) \equiv P(t, x, \Gamma), \tag{1.14}$$

则定义

$$F(y) = \int_E P(t, y, \mathrm{d}z) f(z) \quad (f \in H_1). \tag{1.15}$$

称齐次转移函数 $p(t, x, \Gamma)$ 为强 Feller 的（相应地，Feller 的），如对任意 $f \in H_1$（相应地，$f \in H_2$），有 $F(y) \in H_2$.

系 1.1 只要满足下列二条件之一，无穷近零壹律成立：

1°. X 几乎右连续，而且对任意 $f \in H_2$，

$$\lim_{\substack{y \to x \\ r \downarrow s}} F(r, y) = F(s, x); \tag{1.16}$$

2°. X 几乎右连续，而且转移函数是 Feller 的.

证 只要分别在假设 1° 或 2° 下验证定理 1.1 中(B)满足. 当 X 为右连续时，[8] 中定理 5.11 已证明(B)成立，那里的证法在几乎右连续的情况仍适用，故证明从略（注意，当 E 为实数空间时，为使过程几乎右连续，只需它右随机连续，即(1.12)中极限理解为 $P_{s,x}\lim$ 就够了，故"几乎右连续"本质上弱于"右连续"条件）.

下面定理说明，一般文献中常见的具可列多个状态的过程都满足无穷近零壹律.

定理 1.2 设 E 为可列集，$\mathscr{B}$ 为 E 的全体子集所成的 σ 代数，而且对任意 $s \geqslant 0$ 有

$$\lim_{t \downarrow s} P_{yy}(s, t) = 1 \quad (\text{一切 } y \in E), \tag{1.17}$$

其中 $P_{xy}(s, t) = p(s, x; t, \{y\})$, $\{y\}$ 为含 y 的单点集；则无穷近零壹律成立.

注 1.1 如 $P_{xy}(s, t)$ 是齐次的，则条件(1.17)化为常见的所谓标准性(见[6])条件.

$$\lim_{t \downarrow 0} P_{yy}(t) = 1 \quad (\text{一切 } y \in E). \tag{1.17$'$}$$

定理 1.2 的证明 先证在条件(1.17)下，$P_{xy}(s, t)$ 是 $s \in [0, t)$ 的右连续函数. 实际上，设 $t > r > s$，则

$$\begin{aligned} P_{xy}(r, t) - P_{xy}(s, t) = P_{xy}(r, t)[1 - P_{xx}(s, r)] \\ - \sum_{z \neq x} P_{xz}(s, r) P_{zy}(r, t). \end{aligned} \tag{1.18}$$

右方两项都不超过 $1 - P_{xx}(s, r)$，故

$$|P_{xy}(r, t) - P_{xy}(s, t)| \leqslant 1 - P_{xx}(s, r) \to 0 \quad (r \downarrow s). \tag{1.19}$$

其次，对任意 $\varepsilon > 0$, $s \leqslant r < t$，有

$$\begin{aligned} & P_{s, x}(|x_t - x_r| > \varepsilon) \\ = & \sum_y P_{r, y}(|x_t - x_r|) > \varepsilon) P_{xy}(s, r) \\ \leqslant & \sum_y [1 - P_{yy}(r, t)] P_{xy}(s, r). \end{aligned} \tag{1.20}$$

既然右方被收敛级数 $\sum_y P_{xy}(s, r) = 1$ 所控制，故由(1.17)得

$$\lim_{t \downarrow r} P_{s, x}(|x_t - x_r| > \varepsilon) = 0.$$

从而存在一列 $t_n \downarrow r$，使

$$\lim_{t_n \downarrow r} x_{t_n} = x_r \quad (P_{s, x}).$$

由于 E 中点是孤立的，自上式知，对 $P_{s,x}$ 几乎一切的 ω，存在正整数 $N(\omega)$，当 $n \geqslant N(\omega)$ 时，$x_{t_n}(\omega) = x_r(\omega)$. 于是由(1.19)得

$$\lim_{t_n \downarrow r} P_{x_{t_n} y}(t_n, u) = P_{x_r y}(r, u) \quad (P_{s, x}). \tag{1.21}$$

根据 $\{t_n\}$ 的选择，虽然 $\{t_n\}$ 依赖于 x，但由 E 的可数性，利用对角线方法，总可选取一列 $\{t_n\}$，$t_n \downarrow r$，使(1.21)对一切测度 $P_{s, x}(x \in E)$ 成立. 故定理 1.1 中条件(A)满足(为此，只要在(1.21)中取 $r = s$，并注意此时(A)只需对单点集 Γ 成立). ∎

作为无穷近零壹律不成立的例，考虑只具有三个状态的 X，$E=(0,1,2)$，有齐次转移函数为 $P_{00}(0)=1$，$P_{01}(t)=P_{02}(t)=\frac{1}{2}(t>0)$；$P_{11}(t)\equiv P_{22}(t)\equiv 1(t\geqslant 0)$. 设开始分布集中在 0，可选 $x_t(\omega)$，$t\geqslant 0$，使一切样本函数在 $t>0$ 连续. 令

$$T(\omega)=\inf(t: t>0,\ x(t,\omega)=1),$$

则 $A\equiv(\omega: T(\omega)=0)=(x_\varepsilon(\omega)=1)\in N_\varepsilon^0$，其中 $\varepsilon>0$ 任意，故 $A\in N_{0+0}^0\subseteq\overline{N}^0\cap\mathscr{M}_{0-0}^0$，然而 $P_0(A)=P_{01}(\varepsilon)=\frac{1}{2}$，这里 $P_x=P_{0,x}$. 易见此时(A^1)不满足；实际上，对齐次转移函数，取 $s=0$，则(1.11)化为

$$\lim_{v_n\downarrow 0}P(u-v_n,\ x_{v_n},\ \Gamma)=P(u,\ x,\ \Gamma)\quad (P_x).\tag{1.22}$$

其中 $u>0$. 如取 $x=0$，$\Gamma=\{1\}$，则在本例中，上式右方化为 $P_{01}(u)=\frac{1}{2}$，但左方则以 P_0-概率 1/2 等于 $\lim\limits_{v_n\downarrow 0}P(u-v_n,\ 1,\ \{1\})=1$，又以 P_0-概率 1/2 等于 $\lim\limits_{v_n\downarrow 0}P(u-v_n,\ 2,\ \{1\})=0$，故此时(1.22)不成立.

试问强马氏性与无穷近零壹律的成立有何关系？这依赖于如何定义强马氏性. 如依照[8]中的定义，则这二者间无直接的蕴含关系，因为这种强马氏性只要求马氏性对比常值时刻更多的时刻(即所谓不依赖于将来的时刻)成立，而无穷近零壹律由定理1.1(B)则要求马氏性对常值时刻然而却是更大的 σ 代数 $\mathscr{M}_{t+0}^t$ 成立. 在[4，10]中，对齐次马氏过程 $X=(x_t,\ N_t^0,\ P_x)$ 也下了强马氏性的定义，它要求马氏性不仅对更多的时刻而且同时要对更大的 σ 代数成立，故[4,10]中的强马氏性比[8]中的更强(如果限于 $X=(x_t,N_t^0,P_x)$ 的特殊情况来比较的话). 特别，由[4，10]中的强马氏性可以推出 $\widetilde{X}=(x_t,\ N_{t+0}^0,\ P_x)$ 是马氏过程，故 $P_x(A)=0$ 或 1 对一切 $A\in\overline{N}^0\cap N_{0+0}^0=N_{0+0}^0$ 成立.

注意，对 $X=(x_t,\ \mathscr{M}_t^s,\ P_{s,x})$，如果 $N_{t+0}^s\subseteq\mathscr{M}_t^s$，则 $(x_t,\ N_{t+0}^s,\ P_{s,x})$ 也是马氏过程. 由定理1.1，知 $P_{s,x}(A)=0$ 或 1 对任

意 $A \in N_{s-0}^{s}$ 成立，$s \geqslant 0$，$x \in E$ 任意.

9.2 无穷远零壹律

现在来研究 $X = (x_t, \mathscr{M}_t^s, P_{s,x})$ 的无穷远零壹律. 令 $\Pi = \bigcap_{t \geqslant 0} N^t$，又 Π 关于 $P_{s,x}$ 的完全化 σ 代数记为 $\Pi_{s,x}$. 如对一切 $A \in \Pi_{s,x}$，有 $P_{s,x}(A) = 0$ 或 1，就说 $P_{s,x}$-无穷远零壹律成立；如对一切 $s \geqslant 0$，$x \in E$，$P_{s,x}$-无穷远零壹律都成立，就说无穷远零壹律成立. 直观上可称 $\Pi_{s,x}$ 中的集为尾事件.

以下 $B \doteq C\ (P_{s,x})$ 表示 $P_{s,x}(B\Delta C) = 0$，而 $B\Delta C = (B \backslash C) \cup (C \backslash B)$.

定理 2.1 任意固定 $A \in \Pi_{s,x}$.

(i) A 可表示为

$$A \doteq \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} (x_{t_n} \in E_n) \doteq \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} (x_{t_n} \in E_n) \quad (P_{s,x}), \tag{2.1}$$

其中 $\{t_n\}$ 为任一列常数，$t_n \uparrow \infty$，$E_n \in \mathscr{B}$.

(ii) $P_{s,x}(A) = 0$ 或 1 的充要条件是：存在一列常数 $\{t_n\}$，$t_n \uparrow \infty$（因而对任一列如此的 $\{t_n\}$，有

$$\lim_{n\to\infty} P_{t_n, x_{t_n}}(A) = C\ (\text{常数}) \quad (P_{s,x}); \tag{2.2}$$

此时必然 $P_{s,x}(A) = C$.

(iii) 如定义在 $(\Omega, N^s, P_{s,x})$ 上的过程 $\{P_{t,x_t}(A), t \geqslant s\}$ 可分，则 $P_{s,x}(A) = 0$ 或 1 的充要条件是

$$\lim_{t\to\infty} P_{t,x_t}(A) = C \quad (P_{s,x}). \tag{2.3}$$

证 只须对 $A \in \Pi$ 证明. 由马氏性

$$P_{s,x}(A | N_t^s) = P_{t,x_t}(A) \quad (P_{s,x}), \tag{2.4}$$

令 t 沿任一列 $\{t_n\}$ 而趋于无穷，得

$$P_{s,x}(A | N^s) = \lim_{n\to\infty} P_{t_n, x_{t_n}}(A) \quad (P_{s,x}).$$

由于 $\Pi \subseteq N'$，有

$$\chi_A(\omega) = \lim_{n\to\infty} P_{t_n, x_{t_n}(\omega)}(A) \quad (P_{s,x}). \tag{2.5}$$

任取常数 α，$0 < \alpha < 1$，令

$$E_n = (y : P_{t_n, y}(A) > \alpha) \in \mathscr{B}, \tag{2.6}$$

则对此 $\{E_n\}$，(2.1) 成立. 实际上，以 Ω_0 表示使 (2.5) 成立的 ω 的集，则 $P_{s,x}(\Omega_0) = 1$. 如 $\omega \in A\Omega_0$，则 $\chi_A(\omega) = 1$. 故由 (2.5) 知，对一切充分大的 n，有 $P_{t_n, x_{t_n}(\omega)}(A) > \alpha$，亦即 $x_{t_n}(\omega) \in E_n$，故 $\omega \in \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \bigcap\limits_{n=m}^{\infty} (x_{t_n} \in E_n)$. 反之，如 $\omega \in \Omega_0 - A$，则 $\chi_A(\omega) = 0$. 由 (2.5) 知，对一切充分大的 n 有 $P_{t_n, x_{t_n}(\omega)}(A) \leqslant \alpha$，亦即 $x_{t_n}(\omega) \overline{\in} E_n$，故 $\omega \overline{\in} \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \bigcup\limits_{n=m}^{\infty} (x_{t_n} \in E_n)$. 因而得证除最多差一 $P_{s,x}$-零测集外，$\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \bigcup\limits_{n=m}^{\infty} (x_{t_n} \in E_n) \subseteq A \subseteq \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \bigcap\limits_{n=m}^{\infty} (x_{t_n} \in E_n)$；然而左方集显然包含右方集，故 (2.1) 得证.

注意 (2.6) 中的 $\{E_n\}$ 依赖于 $\{t_n\}$ 及 α.

为证 (ii)，只要证存在一列 $t_n \uparrow \infty$，使 (2.2) 成立是 $P_{s,x}(A) = 0$ 或 1 的充分条件，而 (2.2) 对任一列 $t_n \uparrow \infty$ 成立是必要条件.

设 (2.2) 对某一列 $t_n \uparrow \infty$ 成立，对照 (2.2) 与 (2.5)，可见 $\chi_A(\omega) = C$，$(P_{s,x})$，故 C 必为 0 或 1 而且 $P_{s,x}(A) = C$. 反之，如 $P_{s,x}(A) = 0$ 或 1，则必 $\chi_A = 0 (P_{s,x})$ 或 $\chi_A = 1\ (P_{s,x})$. 由 (2.5) 知，对任一列 $t_n \uparrow \infty$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} P_{t_n, x_{t_n}}(A) = 0\ (P_{s,x})$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty} P_{t_n, x_{t_n}}(A) = 1 (P_{s,x})$. 在前一情形取 $C = 0$，在后一情形取 $C = 1$，即得证 (2.2) 对任一列 $t_n \uparrow \infty$ 成立.

最后，如 $\{P_{t, x_t}(A), t \geqslant s\}$ 是可分过程，则 (iii) 由 (ii) 及可分性 ([7, 第 2 章定理 2.3]) 推出. ∎

作为定理 2.1 的简单推论，考虑独立随机变量过程 $\{x_t, t \geqslant 0\}$. 由于此时 $P_{s,x}(A)$ 与 s，x 无关，故 (2.6) 中的 E_n 等于 E 或 $\varnothing$（空集），于是 (2.1) 化为 $A \doteq \Omega$ 或 $A \doteq \varnothing (P)$，这里 P 等于一

切 $P_{s,x}$. 此外，(2.3) 恒成立，故零壹律成立，此结果对独立变量序列是周知的.

另一推论是：如积分方程

$$f(s, x) = \int_E p(s, x; t, \mathrm{d}y) f(t, y) \tag{2.7}$$

的任一有界解 $f(s, x) \equiv C$(常数)，则对一切 $A \in \bigcap_{\substack{s \geq 0 \\ x \in E}} \Pi_{s,x}$，有 $P_{s,x}(A) = 0$ 或 1；而且如 $P_{s,x}(A) = 0$ 对某一对 (s, x) 成立，则它对任一对 (s, x) 也成立. 实际上，由

$$P_{s,x}(A) = \int_E p(s, x; t, \mathrm{d}y) P_{t,y}(A) \tag{2.8}$$

知 $\{P_{s,x}(A)\}$ 是 (2.7) 的解；但由假定，$P_{s,x}(A) \equiv C$，故满足 (2.2) 而由定理 2.1 即得所需结论.

定理 2.1 还蕴含一重要事实：以 $\Pi_{s,x}^{(t_n)}$ 表 $\prod_{m=0}^{\infty} \mathscr{S}\{x_{t_n}, n \geq m\}$ 关于 $P_{s,x}$ 的完全化 σ 代数，$t_n \uparrow \infty$ 任意，显然 $\Pi_{s,x} \supseteq \Pi_{s,x}^{(t_n)}$；而 (2.1) 则表明 $\Pi_{s,x} = \Pi_{s,x}^{(t_n)}$. 因此，对过程 X 的 $P_{s,x}$- 无穷远零壹律的研究，化为对序列 $\{x_{t_n}, n \geq 0\}$ 的相应的研究.

9.3 齐次马氏过程的无穷远零壹律

以下研究齐次马氏过程 $X = (x_t, \mathscr{M}_t, P_x, \theta_t)$(定义见[8, 2.8 段]). 由于转移函数对推移的不变性，这时自然不宜考虑 $\Pi_x (= \Pi_{0,x})$ 而应考虑它的子 σ 代数 $\mathfrak{A}$. 令 $A \in \mathfrak{A}_x$，如 $A \in \Pi$，而且对任一 $t \geq 0$，有 $P_x(\theta_t A \Delta A) = 0$. 定义 $\mathfrak{A} = \bigcap_{x \in E} \mathfrak{A}_x$. 称 $\mathfrak{A}$ 中的集为不变集. 设 $A \in \mathfrak{A}$，由于

$$P_x(A \mid \mathscr{M}_t) = P_x(\theta_t A \mid \mathscr{M}_t) = P_{x_t}(A) \ (P_x),$$

$$\chi_A = \lim_{n \to \infty} P_{x_{t_n}}(A) \quad (P_x) \tag{3.1}$$

对任一列常数 $t_n \uparrow \infty$ 及任一 $x \in E$ 成立. 正如由 (2.5) 可以证明定理 2.1 一样，类似地可证

定理 3.1 任意固定 $A \in \mathfrak{A}$ 及 $x \in E$.

(i) 集 A 可表示为

$$A \doteq \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} (x_{t_n} \in e) \doteq \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} (x_{t_n} \in e) \ (P_x), \quad (3.2)$$

其中 $e = (y : P_y(A) > \alpha) \in \mathscr{B}$, $0 < \alpha < 1$; $t_n \uparrow \infty$ 任意.

(ii) 为使 $P_x(A) = 0$ 或 1, 充要条件是存在一列常数 $\{t_n\}$, $t_n \uparrow \infty$(因而对任一列如此的 $\{t_n\}$), 有

$$\lim_{n\to\infty} P_{x_{t_n}}(A) = C \ (\text{常数}), \ (P_x). \quad (3.3)$$

此时必然 $P_x(A) = C$.

(iii) 如 (Ω, N^0, P_x) 上的过程 $\{P_{x_t}(A), t \geqslant 0\}$ 可分, 则 $P_x(A) = 0$ 或 1 的充要条件是

$$\lim_{t\to\infty} P_{x_t}(A) = C \ (P_x). \quad (3.4)$$

注意, (3.2) 中的 e 只依赖于 α, 故宜记为 e_α.

由定理 3.1 立得

系 3.1 任意固定 $A \in \mathfrak{A}$ 及 $x \in E$.

(a) $P_x(A) = 0(P_x(A) = 1)$ 的充要条件是: 关于 P_x, 对几乎一切的 ω, 存在一列正整数 $\{k_n\}$, $k_n = k_n(\omega) \uparrow \infty$ 及某 α, $0 < \alpha < 1$, 使 $x_{k_n}(\omega) \in E \setminus e_\alpha (x_{k_n}(\omega) \in e_\alpha)$ 对一切 n 成立.

(b) 如 (Ω, N^0, P_x) 上的过程 $\{P_{x_t}(A), t \geqslant 0\}$ 可分, 则 $P_x(A) = 0(P_x(A) = 1)$ 的充要条件是: 关于 P_x, 对几乎一切的 ω, 存在一列正数 $\{t_n\}$, $t_n = t_n(\omega) \uparrow \infty$, 及某 α, $0 < \alpha < 1$, 使 $x_{t_n}(\omega) \in E \setminus e_\alpha (x_{t_n}(\omega) \in e_\alpha)$ 对一切 n 成立.

证 如 $P_x(A) = 0$, 则 $\chi_A(\omega) = 0(P_x)$, 在(3.1)中取 $t_n = n$, 得 $\lim\limits_{n\to\infty} P_{x_n}(A) = 0$, 因而对 P_x 几乎一切的 ω, 存在正整数 $N = N(\omega)$, 当 $n \geqslant N$ 时, $P_{x_n(\omega)}(A) \leqslant \alpha$, 亦即 $x_n(\omega) \in E \setminus e_\alpha$. 然后取 $k_n(\omega) = N(\omega) + n$, 即得(a)的必要性.

反之, 设 $\{k_n(\omega)\}$ 满足(a)中要求. 由于(3.1)对任一列 $t_n \uparrow \infty$ 正确, 故

$$\lim_{n\to\infty} P_{x_n}(A) = \chi_A \quad (P_x).$$

既然对 P_x 几乎一切 ω，存在 $\{P_{x_n(\omega)}(A)\}$ 的子列 $\{P_{x_{k_n}(\omega)}(A)\}$，使 $P_{x_{k_n}(\omega)}(A) \leqslant \alpha$. 由上式知

$$0 = \lim_{n\to\infty} P_{x_n}(A) = \chi_A \quad (P_x).$$

这表示 $P_x(A) = 0$. 对 $P_x(A) = 1$ 的讨论类似.

如 $\{P_{x_t}(A),\ t \geqslant 0\}$ 可分，则(3.1)可换为

$$\lim_{t\to\infty} P_{x_t}(A) = \chi_A \quad (P_x),$$

然后重复上述讨论，即得(b). ∎

应用以上的结果，可以证明，通常文献中所见的常返型齐次马氏过程都使无穷远零壹律成立. 为此，我们先下一般的常返性的定义. 设 X 为取值于Д-空间的齐次马氏过程，称 x 为常返状态，如对任一含 x 的开集 U，存在一列实数 $t_n = t_n(\omega) \uparrow \infty$，使

$$P_x(x_{t_n}(\omega) \in U,\ \text{一切}\ n) = 1. \tag{3.5}$$

定理 3.2 设 x 为强 Feller 过程的常返状态，又过程 $\{P_{x_t}(A),\ t \geqslant 0\}$ 可分*，$A \in \mathfrak{A}$，则 $P_x(A) = 0$ 或 1.

证 注意 $P_y(A)$ 是 y 的有界 $\mathscr{B}$ 可测函数，故由强 Feller 性及

$$P_y(A) = E_y P_{x_t}(A) = \int_E P(t,\ y,\ \mathrm{d}z) P_z(A)$$

知，$P_y(A)$ 是 y 的连续函数. 如说 $0 < P_x(A) = c < 1$，则

$$U = \left(y:\ \frac{c}{2} < P_y(A) < \frac{1+c}{2}\right) \tag{3.6}$$

是含 x 的开集. 由 x 的常返性知，存在 $t_n(\omega) \uparrow \infty$ 使(3.5)对(3.6)中的 U 成立. 由于 $U \subseteq \left(y:P_y(A) > \frac{c}{2}\right) = e_{\frac{c}{2}}$，故

$$P_x(x_{t_n}(\omega) \in e_{\frac{c}{2}},\ \text{一切}\ n) = 1.$$

于是由系 3.1(b) 得 $P_x(A) = 1$. 另一方面，由 $U \subseteq E \setminus e_{(1+c)/2}$ 及 $P_x(x_{t_n}(\omega) \in E \setminus e_{(1+c)/2},\ \text{一切}\ n) = 1$ 得 $P_x(A) = 0$. 然而常数

* 详言之，即 $(\Omega,\ N^0,\ P_x)$ 上的过程 $\{P_{x_t}(A),\ t \geqslant 0\}$ 可分.

$P_x(A)$ 不可能既等于 1 又等于 0，故发生矛盾，所以 $P_x(A)=0$ 或 1. ∎

现在逐一讨论各种常返型齐次过程，从简单情况开始：

(α) 设 $X=(x_n, N_n, P_x)$ 为可列马氏链，$n=0,1,2,\cdots$，$E=(0,1,2,\cdots)$. 记 $P_{xy}^{(n)}=P(n,x,\{y\})$. 在 E 中引进离散拓扑后此过程是强 Feller 的. 显然，对 $A\in\mathfrak{A}$，$\{P_{x_n}(A), n\geqslant 0\}$ 可分. 故如 x 常返，则必 $P_x(A)=0$ 或 1. 注意，这里常返性的定义重合于马氏链理论中的定义([6, I §4])；x 常返的充要条件是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}P_{xx}^{(n)}=\infty$.

设 x, y 互通，即设存在二正整数 m, n，使 $P_{xy}^{(n)}P_{yx}^{(m)}>0$，则 y 也常返. 令 $\eta(\omega)=\inf(n: x_n(\omega)=y)$，周知 $P_x(\eta(\omega)<\infty)=1$. 因参数集离散，$X$ 必有强马氏性，故如 $A\in\mathfrak{A}$ 而且 $\theta_t A=A$(一切 $t\geqslant 0$)，则

$$
\begin{aligned}
P_x(A) &= \int_{(\eta<\infty)} P_x(A\,|\,N_\eta)P_x(\mathrm{d}\omega) \\
&= \int_{(\eta<\infty)} P_{x(\eta)}(A)P_x(\mathrm{d}\omega) \\
&= P_y(A)P_x(\eta<\infty)=P_y(A),
\end{aligned}
$$

其中 σ 代数 N_η 的定义见[8]. 这表示 $P_x(A)$、$P_y(A)$ 或同时为 0，或同时为 1.

(β) 设 $X=(x_t, N_t, P_x)$ 为可列马氏过程，E 同(α)中的 E. 此过程仍是强 Feller 的. 设转移函数 $P_{xy}(t)$ 是 t 的 Lebesgue 可测函数，一切 $x, y\in E$. 在[6, I §10]中证明了 $\int_0^{\infty}P_{xx}(t)\mathrm{d}t=\infty$ 等价于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}P_{xx}(n)=\infty$. 注意 $P_{xy}(n)$ 是 X 的嵌入马氏链 $\widetilde{X}=(\widetilde{x}_n, \widetilde{N}_n, \widetilde{P}_x)$ 的 n 步转移函数，其中 $\widetilde{x}_n=x_n$，$\widetilde{N}_n=\mathscr{F}\{\widetilde{x}_m, 0\leqslant m\leqslant n\}\subseteq N_n$，而 $\widetilde{P}_x$ 则是 P_x 在 $\mathscr{F}\{\widetilde{x}_m, m\geqslant 0\}$ 上的限制，因而当 B 属于后一 σ 代数关于 $\widetilde{P}_x$ 的完全化 $\mathscr{F}_x\{\widetilde{x}_m, m\geqslant 0\}$ 时，应有 $\widetilde{P}_x(B)=P_x(B)$. 现在设 $\int_0^{\infty}P_{xx}(t)\mathrm{d}t=\infty$，因而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}P_{xx}(n)=\infty$，于是 x 是

$\widetilde{X}$ 的常返状态，故更是 X 的常返状态. 考虑 X 的不变集 A，由定理 3.1(i)，A 也是 $\widetilde{X}$ 的不变集. 故根据(α)，得 $P_x(A)=\widetilde{P}_x(A)=0$ 或 1. 进一步，设 x, y 在 X 中互通，即设存在 $t_1>0$, $t_2>0$，使 $P_{xy}(t_1)P_{yx}(t_2)>0$，则仍由[6, Ⅱ §10]知，x、y 在 $\widetilde{X}$ 中也互通. 因此 $P_y(A)=\widetilde{P}_y(A)=\widetilde{P}_x(A)=P_x(A)$ 对一切 $A\in\mathfrak{A}$，$\theta_tA=A$(一切 $t\geqslant 0$) 成立.

(γ) 设 $X=(x_t, \mathscr{M}_t, P_x)$ 为连续强 Feller 过程，$E=(r_1, r_2)$ 为有穷或无穷一维区间. 定义

$$\tau_1(a)=\inf(t: x_t\leqslant a),\ \tau_2(a)=\inf(t: x_t\geqslant a),$$

设下列条件满足：

R：对任意 a, $b\in E$, $a<b$，有

$$P_a(\tau_2(b)<\infty)P_b(\tau_1(a)<\infty)=1.$$

在此条件之下，已经证明(见[11,15.5 段])

$$P_x(\varliminf_{t\uparrow\infty}x_t=r_1, \varlimsup_{t\uparrow\infty}x_t=r_2)=1\quad(一切\ x\in E).\quad(3.7)$$

由(3.7)及过程的连续性知，每一状态 x 都是常返的. 其次，由强 Feller 性及连续性还知，$\{P_{x_t}(A), t\geqslant 0\}$ 是连续过程，$A\in\mathfrak{A}$. 故由定理 3.2 得 $P_x(A)=0$ 或 1，$x\in E$. 仿(α)知，如 $\theta_tA=A$, $t\geqslant 0$ 任意，则 $P_x(A)=P_y(A)$，对一切 x, $y\in E$.

(δ) 上例的一般化如下：设 X 为取值于 Д- 空间的右连续强 *Feller* 过程，x 是常返状态，则因对 A $\in\mathfrak{A}$，$P_y(A)$对 y 连续，故 $\{P_{x_t}(A), t\geqslant 0\}$对 t 右连续. 由定理 3.2 即得 $P_x(A)=0$ 或 1.

总结上述，得

定理 3.3 设 X 为齐次马氏过程，$x\in E$, $A\in\mathfrak{A}$，在下列条件之一下，有 $P_x(A)=0$ 或 1.

(A) X 为可列马氏链，$\sum_{n=1}^{\infty}P_{xx}^{(n)}=\infty$；此时如 x, y 互通，又对一切整数 $t\geqslant 0$, $\theta_tA=A$，则 $P_x(A)=P_y(A)=0$ 或 1；

(B) X 为可列马氏过程，$P_{xy}(t)$ 是 t 的 Lebesgue 可测函数(一切 x, $y\in E$)，而且$\int_0^{\infty}P_{xx}(t)\mathrm{d}t=\infty$；此时如 x, y 互通，又对一

切 $t \geqslant 0$，$\theta_t A = A$，则 $P_x(A) = P_y(A) = 0$ 或 1；

(C) X 为连续强 Feller 过程，$E=(r_1, r_2)$，而且条件 R 满足；此时如 $\theta_t A=A$，对一切 $t\geqslant 0$，则 $P_x(A)=P_y(A)=0$ 或 1(一切 $x, y\in E$)；

(D) X 为取值于 $\mathbb{R}$-空间的右连续强 Feller 过程，x 常返.

对非常返情况，无穷远零壹律未必成立. 例如，设 X 为马氏链，$P_{01}=\frac{1}{2}$，$P_{02}=\frac{1}{2}$，$P_{11}=P_{22}=1$，则 $A=\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}(x_n=1)\in\mathfrak{A}$，然而 $P_0(A)=\frac{1}{2}$. 再举一例：设 X 是右连续马氏过程，$E=(0, 1, 2)$. $P_{00}(t)=\frac{1}{2}(1+\mathrm{e}^{-t})$，$P_{01}(t)=P_{02}(t)=\frac{1}{4}(1-\mathrm{e}^{-t})$，$P_{11}(t)=P_{22}(t)=1$，$t\geqslant 0$. 令 $s_1(\omega)=(t: x_t(\omega)=1)$，$A=(\omega: s_1(\omega)$ 无界)，则 $A\in\mathfrak{A}$，然而 $P_0(A)=P_0(x(\tau+0)=1)=\frac{1}{2}$，其中 $\tau=\inf(t: x_t(\omega)\neq 0)$. 此例说明[6, Ⅱ §10]中系 2 的第二个结论错误，那里断定 $P_0(A)=0$ 或 1.

考虑任意齐次，E 可列的马氏过程 $X=(x_t, \mathscr{M}_t, P_x)$的嵌入马氏链 $\tilde{X}=(\tilde{x}_n, \tilde{N}_n, \tilde{P}_x)$，后者完全像在($\beta$)中一样定义. 按照 Blackwell 的理论([6, I §17])，可以将 E 对 $\tilde{X}$ 及 $\tilde{P}_x$ 分解为有穷或可列个几乎闭集 E_j 之和：

$$E=E_0\cup E_1\cup E_2\cup\cdots, \tag{3.8}$$

其中 $E_iE_j=\varnothing(i\neq j)$，$E_i(i>0)$为原子集而 E_0 为完全非原子集. 这里及下定理中的 $x\in E$ 固定.

定理 3.4 $P_x(A)=0$ 或 1 对一切 $A\in\mathfrak{A}$ 成立的充要条件是 $E=E_i(i>0)$，即分解式(3.8)中只存在一个原子集且 E_0 不出现，亦即 E 本身是原子集.

证 对任意 $B\in\mathscr{B}$，以 $\mathscr{L}(B)$表任一满足下二关系的 ω 集：

$$\mathscr{L}(B)\doteq\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty}(x_n\in B)\quad(P_x); \tag{3.9}$$

$$\mathscr{L}(B)\in\mathfrak{A}. \tag{3.10}$$

由(3.2)知，对任一 $A\in\mathfrak{A}$，存在 $B\in\mathscr{B}$，使 $\mathscr{L}(B)\doteq A\ (P_x)$；特别，$\mathscr{L}(E)\doteq\Omega\ (P_x)$. 由假设 $E=E_i$，故 $\mathscr{L}(E_i)\doteq\Omega\ (P_x)$. 于是

$$
\begin{aligned}
P_x(A)&=P_x(\mathscr{L}(B))\\
&=P_x(\mathscr{L}(B)\cap\mathscr{L}(E_i))=P_x(\mathscr{L}(B\cap E_i)),
\end{aligned}
$$

但 $E_i=E$ 是原子集，故 $P_x(\mathscr{L}(B\cap E_i))$或者等于 0，或者等于 $P_x(\mathscr{L}(E_i))=P_x(\Omega)=1$. 这便证明了充分性.

反之，设 $P_x(A)=0$ 或 1 对一切 $A\in\mathfrak{A}$ 成立. 若说存在不同的 E_i，E_j，它们都是不空的，则 $\mathscr{L}(E_i)$，$\mathscr{L}(E_j)$都属于 $\mathfrak{A}$，而且 $P_x(\mathscr{L}(E_i))>0$，$P_x(\mathscr{L}(E_j))>0$，因而它们的值都应小于 1(这是由于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}P_x(\mathscr{L}(E_n))=1$)，与假设矛盾. 故只能存在一个 E_i. 剩下要证此 E_i 是原子的. 否则如说 $E_i=E_0$，则必存在 E_0 的两个不相交子集 B_1，$B_2\in\mathscr{B}$，使 $P_x(\mathscr{L}(B_1))>0$，$P_x(\mathscr{L}(B_2))>0$，于是 $P_x(\mathscr{L}(B_1))$既不能等于 0 也不能等于 1 而与假设矛盾. ∎

附带指出一个事实：作为与零壹律相对立的另一极端，设 $E=E_0$，此时对任一常数 c，$0<c<1$，必有 $A\in\mathfrak{A}$，使 $P_x(A)=c$.

实际上，像对 X 定义 $\mathfrak{A}$ 一样*，可对 $\tilde{X}=(\tilde{x}_n,\ \tilde{N}_n,\ \tilde{P}_x)$定义 $\tilde{\mathfrak{A}}$. 由(3.2)，于其中令 $t_n=n$，可见 $\mathfrak{A}\subseteq\tilde{\mathfrak{A}}$；其次，如 $A\in\tilde{\mathfrak{A}}$；则对任一 $y\in E$，有

$$
\begin{aligned}
\chi_A&=\lim_{n\to\infty}P_{x_n}(A)\quad(P_y),\\
\theta_t\chi_A&=\lim_{n\to\infty}P_{x_{n+t}}(A)\\
&=\lim_{n\to\infty}P_y(A|N_{n+t})=P_y(A|N_\infty)=\chi_A\quad(P_y),
\end{aligned}
$$

其中 $t\geqslant0$ 任意. 故 $P_y(A\Delta\theta_tA)=0$ 而 $A\in\mathfrak{A}$. 于是证明了 $\mathfrak{A}=\tilde{\mathfrak{A}}$.

如 $E=E_0$，由[6，I §17]知，对任一 c，$0<c<1$，必存在 $A\in\tilde{\mathfrak{A}}=\mathfrak{A}$，使 $P_x(A)=c$.

以上我们利用了嵌入马氏链 $\tilde{X}=(\tilde{x}_n,\ \tilde{N}_n,\ \tilde{P}_x)$来研究 X 的零

---

* 只是 $t\geqslant0$ 应换为整数 $n\geqslant0$.

壹律．由于(3.2)中$\{t_n\}$，$t_n\uparrow\infty$的任意性，自然也可以改用更一般的嵌入马氏链$\widetilde{X}_h=(\widetilde{x}_{nh},\widetilde{N}_{nh},\widetilde{P}_x)$，$h>0$任意，$\widetilde{P}_x$是$P_x$在$\mathscr{F}_x(\widetilde{x}_{nh}\equiv x_{nh},n\geqslant 0)$上的限制．考虑$E$对$\widetilde{X}_h$及$\widetilde{P}_x$的分解式(3.8)，则定理3.4及上述事实对此分解式也同样正确．

有时需要下列的条件零壹律：设$A\in\mathfrak{A}$，则

$$P_x(A|\mathscr{L}(E_i))=0 \text{ 或 } 1 \quad (i>0). \tag{3.11}$$

实际上，因$A\in\mathfrak{A}=\overline{\mathfrak{A}}$，故存在$B\in\mathscr{B}$，使$P_x(A\Delta\mathscr{L}(B))=0$．由$P_x(\mathscr{L}(E_i))>0$得

$$\begin{aligned}P_x(A|\mathscr{L}(E_i))&=P_x(A\cap\mathscr{L}(E_i))/P_x(\mathscr{L}(E_i))\\&=P_x(\mathscr{L}(B\cap E_i))/P_x(\mathscr{L}(E_i)).\end{aligned}$$

由E_i的原子性，$P_x(\mathscr{L}(B\cap E_i))$只能等于0或$P_x(\mathscr{L}(E_i))$，故(3.11)得证(离散参数情况见[1,引理2.2])．

作为应用，设$f(x)$为定义在E上的$\mathscr{B}$可测有界函数，又$X=(x_t,\mathscr{M}_t,P_x,\theta_t)$中的$\{x_t,t\geqslant 0\}$是可测的[7]，由

$$\begin{aligned}\left(\omega:\int_0^\infty f(x_t)\mathrm{d}t=\infty\right)&=\left(\omega:\int_s^\infty f(x_t)\mathrm{d}t=\infty\right)\\&=\theta_s\left(\omega:\int_0^\infty f(x_t)\mathrm{d}t=\infty\right)\end{aligned}$$

知$A\equiv\left(\omega:\int_0^\infty f(x_t)\mathrm{d}t=\infty\right)\in\mathfrak{A}$．故如定理3.3中任一条件满足，则$P_x(A)=0$或1，若存在$E_i(i>0)$，则条件零壹律(3.11)成立．这些结果不难推广到一般的可加泛函．

利用本篇的结果，可以证明：对任意生灭过程(定义见[2])，两种零壹律恒成立，不论此过程是否常返．详见[12]．

参考文献

[1] 杨向群．可列马氏过程的积分型泛函和双边生灭过程的边界性质．数学进展，1964，7：397～424

[2] 王梓坤．On distributions of functionals of birth and death processes

and their applications in the theory of queues. Scientia Sinica, 1961, 10: 160～170

[3] Blumenthal R M. An extended Markoff property. Trans. Amer. Math. Soc., 1957, 85: 52～72

[4] Blumenthal R M., Getoor R K., Makean Jr H P. Markov processes with identical hitting distributions. Illinois J. of Math., 1962, 6: 402～420

[5] Волконский В А. Аддитивные функционалы от Марковских процессов. труды Моск. Матем. о-ва, 1960, 9: 143～189

[6] Chung K. L. Markov chains with stationary transition probabilities. Berlin: Springer-Verlag, 1967.

[7] Doob J. L. Stochastic processes. New york: Wiley & sons, 1953.

[8] Дынкин Е. Б. 马尔可夫过程论基础(王梓坤译). 北京: 科学出版社, 1962.

[9] Hunt G. A. Markoff Processes and potentials. Illinios J. of Math., 1957, 1: 44～93

[10] Mckean Jr H P., Tanaka H. Additive functionals of the Brownian path. Memoirs of the College of Science, Univ. of Kyoto, Ser., A. 1961, 33: 479～506

[11] Дынкин Е Б. Марковские Процессы. Москва: Госуд. издател. физмат. Летер. 1963. (英译本见第 4 篇的参考文献[6]).

[12] 王梓坤. 生灭过程的遍历性与零壹律. 南开大学学报(自然科学), 1964, 5(5): 89～94

第 10 篇　常返马尔可夫过程的若干性质

10.1　概述

采用[1]中的定义与记号. 设$X=(x_t, \zeta, \mathscr{M}_t, P_x)$为马尔可夫(简称“马氏”)过程，相空间为$(E, \mathscr{B})$. 由于本篇所讨论的都是马氏过程，故将“马氏”二字略去而简称“马氏过程”为“过程”.

一类重要的过程是常返过程. 在马氏链(时间与E均离散)情形，常返性研究得较早[2]，一般常返过程的研究基本上还是近几年来的事[3-4]. 我们的目的是讨论一般常返过程的一些性质. 以下是本篇的大概内容.

在常返过程中，首达(触)某集的时刻起着重要的作用，在[1]中，$s+0$后首达时刻定义为$u(>s)$后首达时刻当$u\downarrow s$时的极限. 在10.2内我们首先给出s(或$s+0$)后首达(或首触)集Γ的时刻的等价定义，在新定义中明确写出了$s+0$后首达时刻的表达式，从而可以看出它与s后首达时刻的明显差别. 对首触时刻也如此. 然后对基本可列过程讨论了这些时刻间的关系. 10.3讨论常返性的充要条件，对过程加一些限制后，可以得到与马氏链情形类似的结果，例如，对典范扩散过程，常返性可通过转移概率来表达. 10.4研究两个问题：常返过程的过份函数与强无穷远

零壹律. 证明了：右连续常返过程的任一连续过份函数恒等于常数；对基本可列过程或一维正则连续强马氏过程，常返性成立的充要条件是任一有限过份函数是常数. 在[5]中我们证明了：对不断右连续常返强 Feller 过程，无穷远零壹律成立. 这里对连续标准过程得到了更完满的结果：强无穷远零壹律成立的充要条件是任一非负有界，在 E 中调和的函数为常数. 最后，我们在 10.5 中将所得结果用于多变量的二级微分方程，讨论了方程 $\partial u/\partial t = Du$ 的基本解与方程 $Du = 0$ 的外 Dirichlet 问题间的关系.

如开头所述，本篇中所用名词的定义均见[1]，我们将指明所在页数而不重新叙述，除非实在必要，否则势必使叙述过于冗长.

10.2 首达与首触时刻

设 $X = (x_t, \zeta, \mathscr{M}_t, P_x)$ 为相空间 $(E, \mathscr{B})$ 中的马氏过程，对 $\omega \in (\zeta > t)$，以 $F_s^t = F_s^t(\omega)$ 表示在时间 $[s, t]$ 中那一段轨道所经历的状态，即

$$F_s^t(\omega) = (x_u(\omega): \quad s \leqslant u \leqslant t); \tag{2.1}$$

对集 $\Gamma \subseteq E$ 及实数 $s \geqslant 0$，定义函数

$$\eta_s^{(1)}(\omega) = \begin{cases} \sup(t : F_s^t \cap \Gamma = \varnothing) = \sup(t : F_s^t \subseteq E \setminus \Gamma), \\ \qquad \text{如 } \zeta(\omega) > s, \text{且括号中 } t\text{- 集不空}; \\ s, \quad \text{如 } \zeta(\omega) > s, \text{但上述 } t\text{- 集空}; \\ s, \quad \text{如 } \zeta(\omega) \leqslant s. \end{cases} \tag{2.2}$$

[1] 中称 $\eta_s^{(1)}(\omega)$ 为 s 后首达 Γ 的时刻. 显然，如 $s \leqslant u$，则 $\eta_s^{(1)}(\omega) \leqslant \eta_u^{(1)}(\omega)$，故存在极限

$$\eta_s^{(2)}(\omega) = \lim_{u \downarrow s} \eta_u^{(1)}(\omega), \tag{2.3}$$

[1] 中称 $\eta_s^{(2)}(\omega)$ 为 $s + 0$ 后首达 Γ 的时刻.

定义(2.3) 直观上不便于掌握，试对 $\eta_s^{(1)}$，$\eta_s^{(2)}$ 各给出一等价

的定义.

引理 2.1 令

$$\tau_s^{(1)}(\omega)=\begin{cases}\inf(t: t\geqslant s, x_t(\omega)\in\Gamma), & \text{如 } \zeta(\omega)>s\text{，且括号中 } t\text{- 集不空；}\\ \zeta(\omega), & \text{如 } \zeta(\omega)>s\text{，但上述 } t\text{- 集空；}\\ s, & \text{如 } \zeta(\omega)\leqslant s.\end{cases}\tag{2.4}$$

$$\tau_s^{(2)}(\omega)=\begin{cases}\inf(t: t> s, x_t(\omega)\in\Gamma), & \text{如 } \zeta(\omega)>s\text{，且括号中 } t\text{- 集不空；}\\ \zeta(\omega), & \text{如 } \zeta(\omega)>s\text{，但括号中 } t\text{- 集空；}\\ s, & \text{如 } \zeta(\omega)\leqslant s.\end{cases}\tag{2.5}$$

则*

$$\tau_s^{(1)}(\omega)=\eta_s^{(1)}(\omega);\tag{2.6}$$

$$\tau_s^{(2)}(\omega)=\eta_s^{(2)}(\omega).\tag{2.7}$$

证 (2.6) 已在[8]附录 §2.8 中指出，证明亦甚易，故从略.

下证(2.7).

以 $u(>s)$ 代(2.4) 中的 s 后所得的式记为(2.4)′，它是 $\tau_u^{(1)}(\omega)$ 的定义，分别考虑(2.5) 中三种情形. 如 $\zeta(\omega)\leqslant s(<u)$，则因 $\zeta(\omega)<u$ 而有

$$\begin{aligned}\tau_s^{(2)}(\omega)&=s=\lim_{u\downarrow s}u=\lim_{u\downarrow s}\tau_u^{(1)}(\omega)\\&=\lim_{u\downarrow s}\eta_u^{(1)}(\omega)=\eta_s^{(2)}(\omega),\end{aligned}\tag{2.8}$$

最后二等式用到(2.6) 及(2.3). 如出现(2.5) 中第二情形，因 $\zeta(\omega)>s$，故如 $u(>s)$ 充分接近 s，则 $\zeta(\omega)>u$ 而且

$$(t: t\geqslant u,\ x_t(\omega)\in\Gamma)\subseteq(t: t>s,\ x_t(\omega)\in\Gamma)=\varnothing,$$

---

* 注意 $\tau_s^{(1)}$、$\tau_s^{(2)}$ 之区别只在于把(2.4) 括号中的 $t\geqslant s$ 换为(2.5) 中的 $t>s$. 至于在(2.2) 中，无论把 $\sup(t: F_s^t\cap\Gamma=\varnothing)$ 理解为 $\sup(t: t\geqslant s, F_s^t\cap\Gamma=\varnothing)$ 或 $\sup(t: t>s, F_s^t\cap\Gamma=\varnothing)$，所得结果都一样. 对下面的引理 2.2 也可作同样的注.

故由(2.4)′知 $\tau_u^{(1)}(\omega)=\zeta(\omega)=\tau_s^{(2)}(\omega)$，从而

$$\tau_s^{(2)}(\omega)=\lim_{u\downarrow s}\tau_u^{(1)}(\omega)=\lim_{u\downarrow s}\eta_u^{(1)}(\omega)=\eta_s^{(2)}(\omega). \qquad (2.9)$$

最后考虑第一情形. 如能证：可找到一列 $\{u_n\}$，$u_n\downarrow s$，使

$$\lim_{n\to\infty}\tau_{u_n}^{(1)}(\omega)=\tau_s^{(2)}(\omega), \qquad (2.10)$$

则因 $\lim\limits_{u\downarrow s}\tau_u^{(1)}(\omega)$ 存在而有

$$\tau_s^{(2)}(\omega)=\lim_{n\to\infty}\tau_{u_n}^{(1)}(\omega)=\lim_{u\downarrow s}\tau_u^{(1)}(\omega)$$
$$=\lim_{u\downarrow s}\eta_u^{(1)}(\omega)=\eta_s^{(2)}(\omega),$$

从而(2.7)完全得证，因此只要证明(2.10).

先设 $\tau_s^{(2)}=s$. 由(2.5)知对每 $\frac{1}{n}>0$，存在 u_n，使 $x_{u_n}\in\Gamma$ 而且 $0<u_n-\tau_s^{(2)}<\frac{1}{n}$，当 n 充分大时 $\zeta>u_n$. 由 $\tau_{u_n}^{(1)}$ 的定义得 $\tau_{u_n}^{(1)}=u_n$，从而

$$0<\tau_{u_n}^{(1)}-\tau_s^{(2)}<\frac{1}{n}, \qquad \lim_{n\to\infty}\tau_{u_n}^{(1)}=\tau_s^{(2)}.$$

次设 $\tau_s^{(2)}=a>s$. 于是在区间 (s, a) 中没有点 t 能满足(2.5)中括号内的条件. 故当 n 充分大时，$\zeta>s+\frac{a-s}{n}$，而且

$$\tau_s^{(2)}=\inf\left(t: t\geqslant s+\frac{a-s}{n}, x_t\in\Gamma\right)=\tau_{s+\frac{a-s}{n}}^{(1)};$$

取 $u_n=s+\frac{a-s}{n}$ 即得证(2.10). ∎

今设相空间是拓扑可测空间 $(E, \mathscr{E}, \mathscr{B})$[1，789页]，以 $\hat{F}_t^s$ 表示(2.1)中 F_t^s 的闭包，定义函数

$$\eta_s^{(3)}(\omega)=\begin{cases}\sup(t: \hat{F}_t^s\cap\Gamma=\varnothing)=\sup(t: \hat{F}_t^s\subseteq E\setminus\Gamma), \\ \qquad \text{如 } \zeta(\omega)>s\text{，且括号中 } t\text{-集不空}; \\ s, \qquad \text{如 } \zeta(\omega)>s\text{，但上述 } t\text{-集空}; \\ s, \qquad \text{如 } \zeta(\omega)\leqslant s.\end{cases} \qquad (2.11)$$

[1]中称 $\eta_s^{(3)}(\omega)$ 为 s 后首触 Γ 的时刻. 显然 如 $s\leqslant u$，则 $\eta_s^{(3)}(\omega)\leqslant\eta_u^{(3)}(\omega)$，故存在极限

$$\eta_s^{(4)}(\omega) = \lim_{u \downarrow s} \eta_u^{(3)}(\omega), \tag{2.12}$$

[1] 中称 $\eta_s^{(4)}(\omega)$ 为 $s+0$ 后首触 Γ 的时刻.

引理 2.2 令*

$$\tau_s^{(3)}(\omega)$$
$$= \begin{cases} \inf(t: t \geqslant s, \text{存在 } s_n, s \leqslant s_n \uparrow t, \text{使有极限} \lim\limits_{n\to\infty} x_{s_n} \in \Gamma), \\ \qquad \text{如 } \zeta(\omega) > s, \text{且括号中 } t\text{- 集不空;} \\ \zeta(\omega), \quad \text{如 } \zeta(\omega) > s, \text{但上述 } t\text{- 集空;} \\ s, \quad \text{如 } \zeta(\omega) \leqslant s. \end{cases} \tag{2.13}$$

$$\tau_s^{(4)}(\omega)$$
$$= \begin{cases} \inf\{t: t > s, \text{存在 } s_n, s \leqslant s_n \uparrow t, \text{使有极限} \lim\limits_{n\to\infty} x_{s_n} \in \Gamma), \\ \qquad \text{如 } \zeta(\omega) > s, \text{且括号中 } t\text{- 集不空;} \\ \zeta(\omega), \quad \text{如 } \zeta(\omega) > s, \text{但上述 } t\text{- 集空;} \\ s, \quad \text{如 } \zeta(\omega) \leqslant s. \end{cases} \tag{2.14}$$

则

$$\tau_s^{(3)}(\omega) = \eta_s^{(3)}(\omega), \tag{2.15}$$

$$\tau_s^{(4)}(\omega) = \eta_s^{(4)}(\omega). \tag{2.16}$$

证 (2.15) 的证明从略. 为证(2.16), 逐句重复引理 2.1 的证明到(2.10), 只要在(2.14) 中第一情形下证明: 存在一列 $\{u_n\}$, $u_n \downarrow s$, 使

$$\lim_{n\to\infty} \tau_{u_n}^{(3)}(\omega) = \tau_s^{(4)}(\omega), \tag{2.17}$$

以 $u(>s)$ 代(2.13) 中的 s 后所得式记为(2.13)$'$, 它是 $\tau_u^{(3)}(\omega)$ 的定义.

先设 $\tau_s^{(4)} = s$. 由定义, 对每正整数 n, 存在 $u_n > s$, 使 $0 < u_n - \tau_s^{(4)} < \dfrac{1}{n}$, 而且存在 $s_m^{(n)}$, 使 $s \leqslant s_m^{(n)} \uparrow u_n (m \to \infty)$, 同时 $\lim\limits_{m\to\infty} x_{s_m}^{(n)}$

* (2.13) 及(2.14) 中诸 s_n 可以恒等.

$\in \Gamma$. 不妨设 $u_{n-1} > u_n > \tau_s^{(4)}$, $u_n \downarrow \tau_s^{(4)} = s$. 由(2.13)′ 中 $\tau_{u_n}^{(3)}$ 的定义，当 n 充分大时，(2.13)′ 中第一情形出现，而且 $\tau_{u_n}^{(3)} \leqslant u_{n-1}$，故

$$0 < \tau_{u_n}^{(4)} - \tau_s^{(4)} \leqslant u_{n-1} - \tau_s^{(4)} < \frac{1}{n-1} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

次设 $\tau_s^{(4)} = a > s$，于是在区间 (s, a) 中没有满足(2.14)括号中二要求的 t，故当 n 充分大时，有 $\zeta > s + \frac{a-s}{n}$，而且

$$\begin{aligned}\tau_s^{(4)} = \inf\Big\{ t: t \geqslant s + \frac{a-s}{n}, \text{存在 } s_n,\\ s + \frac{a-s}{n} \leqslant s_n \uparrow t, \text{使} \lim_{n\to\infty} x_{s_n} \in \Gamma \Big\}\\ = \tau^{(3)}_{s + \frac{a-s}{n}};\end{aligned}$$

取 $u_n = s + \frac{a-s}{n}$ 即得证(2.17). ∎

今设 $E = (0, 1, 2, \cdots)$ 为全体非负整数，$\overline{E} = E \cup \{\infty\}$，称 $X = (x_t, \infty, N_t, P_x)$ 为基本可列过程，如 X 具有下列性质 1°—5°：

1°　转移概率 $P_{xy}(t) = P(t, x, \{y\})$ 满足

$$\lim_{t\to 0} P_{xx}(t) = 1 \quad (\text{一切 } x \in E). \tag{2.18}$$

2°　X 完全可分：对任一稠于 $[0, \infty)$ 的点列 $R = \{r_n\}$ 及任一 $\omega \in \Omega$，任一 $t \in [0, \infty)$，存在子列 $\{s_n\} \subseteq R$，使同时有

$$\lim_{n\to\infty} s_n = t, \qquad \lim_{n\to\infty} x_{s_n}(\omega) = x_t(\omega).$$

3°　X 右下半连续：对每 $\omega \in \Omega$ 及每 $t \geqslant 0$ 有

$$\varliminf_{r \downarrow t} x_r(\omega) = x_t(\omega).$$

4°　过程 X 可测[1, 第 143 页].

5°　$\overline{\mathscr{N}_t} = \overline{\mathscr{N}_{t+0}} = \bigcap_{u>t} \overline{\mathscr{N}_u}$.

在[6]中已证明：对任意满足(2.18)的转移概率*$(P_{xy}(t))$，

---

* 我们假定 $\sum_{y\in E} P_{xy}(t) = 1$，一切 $x \in E$, $t \geqslant 0$.

$x, y \in E$，必存在满足 2°—5° 的过程 X，使 X 的转移概率重合于已给的$(P_{xy}(t))$. 由于可分性，可能 $x_t(\omega) = \infty$，但对每固定的 $t \geqslant 0$，

$$P_x(x_t = \infty) = 1 - \sum_{y \in E} P_{xy}(t) = 0. \tag{2.19}$$

以后有时也记 $\tau_s^{(i)}$ 为 $\tau_s^{(i)}(\Gamma)$，$i = 1, 2, 3, 4$. 如 $s = 0$，则简写 $\tau_0^{(i)}$ 为 $\tau^{(i)}$，并称 $\tau^{(1)} = \tau^{(1)}(\Gamma)$，$\tau^{(3)} = \tau^{(3)}(\Gamma)$ 分别为首达、首触 Γ 的时刻.

引理 2.3* 对基本可列过程，如 $\Gamma \subseteq E$，则

(i) $\tau_s^{(1)} = \tau_s^{(2)} = \tau_s^{(3)} = \tau_s^{(4)}$.

(ii) 存在有穷集列 $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \subseteq \cdots \subseteq \Gamma$，使 $\tau_s^{(i)}(\Gamma_n) \downarrow \tau_s^{(i)}(\Gamma)$，$i = 1, 2, 3, 4$.

(iii) $(\tau^{(i)} > t) \in \mathscr{N}_{t+0}$ $(t \geqslant 0)$，$i = 1, 2, 3, 4$.

证 (i) 先证 $\tau_s^{(1)} \geqslant \tau_s^{(2)}$：如 $x_s(\omega) \overline{\in} \Gamma$，显然有 $\tau_s^{(1)}(\omega) = \tau_s^{(2)}(\omega)$，故只要考虑 $x_s(\omega) = j \in \Gamma$ 的情形. 由于 $\Gamma \subseteq E$，故 $j \neq \infty$，由 3° 及 E 的离散性，对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $s < t < s + \varepsilon$，使 $x_t(\omega) = j$，故 $\tau_s^{(2)}(\omega) \leqslant s + \varepsilon$，由 ε 的任意性得 $\tau_s^{(2)}(\omega) = s \leqslant \tau_s^{(1)}(\omega)$.

再证 $\tau_s^{(3)} \geqslant \tau_s^{(1)}$：只要考虑 $\tau_s^{(3)} < \infty$ 的情形. 由 $\tau_s^{(3)}$ 的定义，对 $\varepsilon > 0$，必存在 $t \in [\tau_s^{(3)}, \tau_s^{(3)} + \varepsilon)$，$s \leqslant s_n \uparrow t$，使 $x_{s_n} \to j \in \Gamma$. 故当 n 充分大时，$x_{s_n} = j$，于是 $\tau_s^{(1)} \leqslant s_n \leqslant t \leqslant \tau_s^{(3)} + \varepsilon$.

最后注意，由 $\tau_s^{(i)}$ 的定义及引理 2.1、2.2 显见

$$\tau_s^{(2)} \geqslant \tau_s^{(1)}, \ \tau_s^{(3)} \leqslant \tau_s^{(1)},$$

$$\tau_s^{(3)} \leqslant \tau_s^{(4)} \leqslant \tau_s^{(2)}.$$

综合以上诸不等式即得证(i).

(ii) 设 $\tau_s^{(1)}(\Gamma) < \infty$. 由 $\tau_s^{(1)}(\Gamma)$ 的定义，对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $t \in [\tau_s^{(1)}(\Gamma), \tau_s^{(1)}(\Gamma) + \varepsilon)$，使 $x(t, \omega) = j \in \Gamma$. 将 Γ 中元按大小排

---

* 一般地，基本可列过程不是[1]中意义下的标准过程，故引理 2.3 不是[1]中定理 4.3 的特殊情形. 不过证明的方法部分地类似.

列，小者居前，前 n 元之集记为 Γ_n，当 n 充分大时，$j \in \Gamma_n$，故

$$\tau_s^{(1)}(\Gamma) \leqslant \tau_s^{(1)}(\Gamma_n) \leqslant t \leqslant \tau_s^{(1)}(\Gamma) + \varepsilon;$$

显然 $\tau_s^{(1)}(\Gamma_n)$ 不上升，故得证(ii). 如 $\tau_s^{(1)}(\Gamma) = \infty$，显然 $\tau_s^{(1)}(\Gamma_n) = \infty$.

(iii) 由于 X 完全可分，E 离散，又 $\infty \overline{\in} \Gamma$，故

$$(\tau^{(1)} < t) = (\text{存在有理数 } r,\ 0 \leqslant r < t,\ x_r(\omega) \in \Gamma) \in \mathscr{N}_t \quad (t > 0),$$

$$(\tau^{(1)} \leqslant t) = \lim_{n \to \infty}\left(\tau^{(1)} < t + \frac{1}{n}\right) \in \mathscr{N}_{t+0} \quad (t \geqslant 0),$$

再由(i)即得(iii). ∎

如在 $E = (0, 1, 2, \cdots)$ 中引进距离 $\rho(x, y) = 0(x = y)$，$\rho(x, y) = 1(x \neq y)$，并令 $\mathscr{B}$ 为 E 中全体子集所组成的 σ 代数，则 E 成为距离可测空间.

10.3 常返性的充要条件

以后永远假定 $X = (x_t, \zeta, \mathscr{M}_t, P_x)$：

(A) X 是取值于拓扑可测空间$(E, \mathscr{C}, \mathscr{B})$中的右连续马氏过程或基本可列过程；

(B) $P_x(\zeta > 0) = 1$ （一切 $x \in E$）. (3.1)

这二条件直到本篇结束不再声明.

任取二点 $x, y \in E$，说 X 自 x 常到 y，如对 y 的任一邻域 U，有

$$P_x(\text{存在无穷多个 } t_n = t_n(\omega) \uparrow \zeta(\omega),\ \text{使}\ x_{t_n}(\omega) \in U,\ n = 1, 2, \cdots) = 1; \tag{3.2}$$

如对 E 中任意二点 x, y, X 都自 x 常到 y，则称过程 X 为常返的.

定理 3.1 设 X 为标准过程[1, 150 页]*，X 常返的充要条

* 故相空间 E 是局部紧的豪司道夫空间，具有可数基底. 自然不必考虑 E 只含一点的平凡情况，因为这时在(3.1)下 X 必常返. 故以后恒设 E 至少含二不同的点.

件是：对任一点 $x \in E$ 及任一非空开集 U，有

$$P_x(\tau_U < \zeta) = 1, \tag{3.3}$$

这里 τ_U 是首达 U 的时刻.

证 由(3.2)立得(3.3)，故只要证充分性，任取二非空开集 G, F，使 $\bar{G} \cap \bar{F} = \varnothing$，$\bar{G}$ 表示 G 的闭包. 定义

$$\left.\begin{aligned}
g &= \begin{cases} \inf(t: t \geqslant 0, x_t \in G), \\ \zeta, \quad (\text{如上集空}); \end{cases} \\
f &= \begin{cases} \inf(t: t \geqslant 0, x_t \in F), \\ \zeta, \quad (\text{如上集空}); \end{cases} \\
g_1 &= g; \\
f_1 &= \begin{cases} g_1 + \theta_{g_1} f, \text{如 } g_1 < \zeta, \\ \zeta, \qquad \text{否则}; \end{cases} \\
g_n &= \begin{cases} f_{n-1} + \theta_{f_{n-1}} g, \text{如 } f_{n-1} < \zeta, \\ \zeta, \qquad \text{否则}; \end{cases} \\
f_n &= \begin{cases} g_n + \theta_{g_n} f, \quad \text{如 } g_n < \zeta, \\ \zeta, \qquad \text{否则}. \end{cases}
\end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

因而 g_1 为首达 G 的时刻，f_1 是首达 G 以后首达 F 的时刻等等. 试证对任意 $x \in E$，任意正整数 n，有

$$P_x(g_n < \zeta) = 1, \quad P_x(f_n < \zeta) = 1. \tag{3.5}$$

实际上，由(3.3)得：对任意 $x \in E$，有

$$P_x(g < \zeta) = 1, \quad P_x(f < \zeta) = 1; \tag{3.6}$$

故

$$P_x(g_1 < \zeta) = P_x(g < \zeta) = 1, \tag{3.7}$$

而且由强马氏性及(3.6)、(3.7)得

$$\begin{aligned}
P_x(f_1 < \zeta) &= P_x(g_1 < \zeta, g_1 + \theta_{g_1} f < \zeta) \\
&= P_x(g_1 < \zeta, \theta_{g_1}(f < \zeta)) \\
&= \int_{(g_1 < \zeta)} P_{x_{g_1}}(f < \zeta) P_x(\mathrm{d}\omega). \\
&= P_x(g_1 < \zeta) = 1,
\end{aligned} \tag{3.8}$$

于是当 $n=1$ 时(3.5)得证. 今设 $n=m$ 时(3.5)成立，则与(3.8)类似地有

$$\begin{aligned}P_x(g_{m-1}<\zeta) &= P_x(f_m<\zeta,\ f_m+\theta_{f_m}g<\zeta)\\ &= P_x(f_m<\zeta,\ \theta_{f_m}(g<\zeta))\\ &= \int_{(f_m<\zeta)} P_{x_{f_m}}(g<\zeta)P_x(\mathrm{d}\omega)\\ &= P_x(f_m<\zeta)=1;\end{aligned}$$

同样有 $P_x(f_{m+1}<\zeta)=1$. 故(3.5)得以证明.

由过程的右连续性得

$$x_{g_n}\in\overline{G},\ x_{f_n}\in\overline{F}. \tag{3.9}$$

今对任意给定的点 x, $y\in E$, y 的任一邻域 U，可取二开集 G、F，使 $\overline{G}\subseteq U$，$\overline{G}\cap\overline{F}=\varnothing$. 对这一对 G, F，用(3.4)定义二点列 $\{g_n\}$, $\{f_n\}$. 我们证明：取 $t_n=g_n$，则(3.2)成立.

实际上，由于 X 右连续而且 $\overline{G}\cap\overline{F}=\varnothing$，故 P_x- 几乎有 $\zeta>g_{n+1}>g_n$，从而存在极限

$$g_\infty=\lim_{n\to\infty}g_n\leqslant\zeta; \tag{3.10}$$

又由(3.9)，

$$x_{g_n}\in\overline{G}\subseteq U; \tag{3.11}$$

因此，如能证

$$P_x(g_\infty=\zeta)=1, \tag{3.12}$$

则由(3.10)、(3.11)，(3.12)立得(3.2). 为证(3.12)令 $A=(g_\infty<\zeta)$，注意 P_x- 几乎有 $g_1<f_1<g_2<f_2<\cdots$，可见三序列 $\{g_n\}$, $\{f_n\}$, $\{g_n, f_n\}$ 有公共的极限 g_∞，根据 X 的标准性，有

$$\lim_{n\to\infty}x_{g_n}=x_{g_\infty},\ \lim_{n\to\infty}x_{f_n}=x_{g_\infty}\qquad (A,\ P_x\text{- 几乎}).$$

由此及(3.9)，得 $x_{g_\infty}\in\overline{G}$, $x_{g_\infty}\in\overline{F}$；然而 $\overline{G}\cap\overline{F}=\varnothing$，因而必定 $P_x(A)=0$，这便证明了(3.12). ∎

注 3.1 对于基本可列过程 X、X 常返的充要条件是：对任二点 x, $y\in E$，有

$$P_x(\tau_y<\infty)=1,$$

这里 τ_y 是首达单点集 $\{y\}$ 的时刻.

实际上，仿照定理3.1的证明直到(3.11)(这时可取 $G=U=\{y\}$，$F=\{z\}$，z 为任一不同于 y 的状态，并用右下半连续性以代替右连续性). 剩下只要证(3.12)，然而(3.12)在[7，第 205 页]上已证明. ∎

定理 3.2 设 X 为典范扩散过程[1，238 页]：

(i) 如果 X 常返，则对任一点 $x\in E$，任一非空的具有紧闭包的开集 G，有

$$\int_0^{\infty} P(t, x, G)\mathrm{d}t=\infty; \tag{3.13}$$

(ii) 反之，如 X 不断[1，第 117 页]，而且对某一点 x 及某一具有紧闭包的开集 G，(3.13) 成立，则 X 常返.

证 (i) 不妨设 X 是标准过程[1，第 534 页]. 令 η_G 为首出 G 的时刻(即 $\eta_G=\tau_{E\setminus G}$ 为首达 $E\setminus G$ 的时刻). 由 G 的开性及 X 的连续性得

$$E_x\eta_G>0 \quad (一切\ x\in G). \tag{3.14}$$

因为 $E_x\eta_G$ 在 G 内上调和[1，第 544 页]，故 $E_x\eta_G$ 在 G 内下半连续[1，第 534 页]. 任取开集 $V\subseteq G$，使 $\overline{V}\subseteq G$，$\overline{V}$ 紧，试证

$$\inf_{y\in\overline{V}} E_y\eta_G=a>0. \tag{3.15}$$

实际上，如说 $a=0$，则必存在 $y_n\in V$，使 $E_{y_n}\eta_G\to 0(n\to\infty)$. 由 $\overline{V}$ 的紧性，不妨设 $y_n\to y\in\overline{V}$. 由 $E_x\eta_G$ 的下半连续性得

$$E_y\eta_G\leqslant \varliminf_{n\to\infty} E_{y_n}\eta_G=0,$$

但 $y\in\overline{V}\subseteq G$，故上式与(3.14)矛盾而得证(3.15).

有必要时可缩小 G(注意(3.13)如对较小的 G 成立，则对较大的 G 更成立)，以使存在开集 F，使 $\overline{G}\cap\overline{F}=\varnothing$，从而 $\overline{V}\cap\overline{F}=\varnothing$. 用 V，F 代(3.4)中的 G，F，可用(3.4)定义二列 $\{v_n\}$、$\{f_n\}$，$v_n<f_n$. 令

$$\tau_n=\inf(t: t\geqslant 0, x_{v_n+t}\in E\setminus G), n=1, 2, \cdots,$$

显然 $x_s\in G$ 对一切 $s\in[v_n, v_n+\tau_n]$ 成立. 定义

$$s_G(\omega)=(t: t\in[0, \zeta(\omega)), x_t(\omega)\in G).$$

由于 X 连续，对每个固定的 ω，$s_G(\omega)$ 是直线上的 Borel 可测集．以 μ 表示 Lebesgue 测度，则

$$E_x[\mu(s_G)] \geqslant E_x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\tau_n\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}E_x\tau_n = \sum_{n=1}^{\infty}E_xE_{x_{v_n}}\tau_1. \tag{3.16}$$

但由(3.15)，对一切 $y \in \overline{V}$，有

$$E_y\tau_1 = E_y(\eta_G - \eta_V) = E_y\theta_{\eta_V}\eta_G$$

$$= E_yE_{x_{\eta_V}}\eta_G \geqslant a > 0, \tag{3.17}$$

既然 $x_{v_n} \in \overline{V}$，故由上式及(3.16)得

$$\int_0^{\infty}P(t, x, G)\mathrm{d}t = E_x[\mu(s_G)] \geqslant \sum_{n=1}^{\infty}a = \infty.$$

(ii) 设(3.13)对某 x 及某具有紧闭包的非空开集 G 成立，则必存在紧集 K，使

$$P_y(\text{存在 } t \geqslant 0,\ \text{使 } x_t \in K) = 1 \tag{3.18}$$

对一切 $y \in E$ 成立，否则由[3,引理 3.1]有

$$\int_0^{\infty}P(t, x, G)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\infty}P(t, x, \overline{G})\mathrm{d}t < \infty,$$

与假设矛盾．注意典范扩散过程是强 Feller 过程而且 $P(t, y, U) > 0$ 对一切 $y \in E$，$t > 0$ 及一切非空开集成立[1，232 页及 799 页]，于是由(3.18)及[3，198 页]知(3.3)满足．如上所述，不妨设 X 是标准过程，故根据定理 3.1 即得证 X 的常返性． ∎

由上定理第(i)部分的证明，可见对常返典范扩散过程 X，有

$$E_x\zeta \geqslant E_x[\mu(s_G)] = \infty \quad (\text{一切 } x \in E). \tag{3.19}$$

注 3.2 如基本可列过程 X 的转移概率满足 $P_{xy}(t) > 0$(一切 $x, y \in E$，$t > 0$)，则 X 常返的充要条件是下二条件之一：

(a) $\int_0^{\infty}P_{xx}(t)\mathrm{d}t = \infty$ 对一切 $x \in E$ 成立；

(b) $\int_0^{\infty}P_{xx}(t)\mathrm{d}t = \infty$ 对某一 $x \in E$ 成立．

证明见[7，Ⅱ §10]．

例 3.1 设 $X=(x_t,\infty,\mathscr{M}_t,P_x)$ 为 n 维 Wiener 过程，则当 $n>2$ 时 X 非常返，但当 $n\leqslant 2$ 时 X 常返. 实际上，如 $n>2$，则 $\lim\limits_{t\to\infty}|x_t|=\infty$($P_x$- 几乎，一切 x)[1，第 590 页]，显然这时(3.2)对任一有界开集 U 不成立. 如 $n\leqslant 2$，对任一非空开集 G 及任一 $x\in E$，(3.13) 成立[1，第 585 页]，既然 X 是典型扩散的，故由定理 3.2(ii) 知 X 常返.

10.4 过份函数与强零壹律

设过程 X 的转移概率为 $P(t,x,A)$，$x\in E$，$A\in\mathscr{B}$. 所谓 X 的过份函数 $f(x)(x\in E)$ 是指关于 $P(t,x,A)$ 过份[1，第 493 页]. 对相空间的假设如 10.3.

定理 4.1 (i) 右连续常返过程的任一连续* 过份函数为常数. (ii) 常返基本可列过程的任一过份函数为常数.

证 (i) 设 X 是右连续常返马氏过程，$f(x)$ 是 X 的任一连续过份函数. 令

$$\widetilde{\mathscr{M}}_t=(A+B;\ A\in\mathscr{M}_t,\ B\in\mathscr{M}^0[\zeta\leqslant t]),$$

则 $\widetilde{\mathscr{M}}_t$ 是 Ω 中 σ 代数，而且对任一 $x\in E$，过程$(f(x_t),\widetilde{\mathscr{M}}_t,P_x)$ 是半 Martingale [1，第 506～507 页]，由于 X 右连续，f 连续，可见 $f(x_t)$ 右连续. 于是由半 Martingale 收敛定理，存在全概率 ω-集 $\tilde{\Omega}$，即满足 $P_x(\tilde{\Omega})=1$(一切 $x\in E$) 的集，使当 $\omega\in\tilde{\Omega}$ 时，存在极限

$$\xi(\omega)=\lim_{t\uparrow\zeta}f(x_t(\omega)).\tag{4.1}$$

任取二点 $x,y\in E$，对 $\varepsilon>0$，定义 y 的邻域 U_ε，

$$U_\varepsilon=(a;\ |f(a)-f(y)|<\varepsilon).\tag{4.2}$$

---

* 连续性假定中自然蕴含着有限性的假定.

由 X 的常返性，(3.2) 对此 x，y 及 $U = U_\varepsilon$ 成立，即

$$P_x(|f(x_{t_n}(\omega)) - f(y)| < \varepsilon, n = 1, 2, \cdots) = 1, \tag{4.3}$$

其中 $\{t_n\}$ 与(3.2) 中的相同. 但由(4.1) 有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_{t_n}(\omega)) = \xi(\omega)$，故由(4.3) 得

$$P_x(|\xi(\omega) - f(y)| \leqslant \varepsilon) = 1,$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性可见

$$P_x(\xi(\omega) = f(y)) = 1. \tag{4.4}$$

今对任一点 $z \in E$，同样有 $P_x(\xi(\omega) = f(z)) = 1$，由此及(4.4) 立得 $f(y) = f(z)$，故 f 恒等于一常数.

(ii) 今设 X 为常返基本可列过程，为了避免 $x_t(\omega)$ 可能等于 ∞ 的困难，我们只在 $t = 0, 1, 2, \cdots$ 上考虑此过程，即只考虑 $\{x_n(\omega), n = 0, 1, 2, \cdots\}$. 由于(2.19) 及参数集(非负整数集)的可列性，存在一全概率集 $\tilde{\Omega}$，当 $\omega \in \tilde{\Omega}$ 时，$x_n(\omega) \neq \infty$(一切 n). 有必要时缩小基本事件空间到 $\tilde{\Omega}$，便得到不取 ∞ 的马氏链 $\tilde{X} = (x_n, \widetilde{\mathscr{N}}_n, P_x)$，其中 $\widetilde{\mathscr{N}}_n$ 是由 $\{x_i(\omega), i \leqslant n\}$ 所产生的 $\tilde{\Omega}$ 中的 σ 代数. 根据[7, Ⅱ §10]，由 X 的常返性立得 $\tilde{X}$ 的常返性；而且易见对 X 的过份函数 f 对 $\tilde{X}$ 也是过份的*. 于是如 f 有限，则对每一 $x \in E$，$(f(x_n), \widetilde{\mathscr{N}}_n, P_x)$ 是一半 Martingale，从而存在极限

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n(\omega)) = \xi(\omega) \quad (P_x\text{- 几乎}) \tag{4.5}$$

由 $\tilde{X}$ 的常返性：对任意 x，$y \in E$

$$P_x(\text{存在正整数列 } t_n = t_n(\omega) \uparrow \infty, \text{使 } x_{t_n}(\omega) = y, \\ n = 1,2, \cdots) = 1,$$

故由(4.5) 得 $P_x(\xi(\omega) = f(y)) = 1$；于是回到(4.4) 而得证有限的 f 为常数. 今设对某 $y \in E$ 有 $f(y) = \infty$，由 X 的常返性易见

---

* 对 $\tilde{X}$ 过份的函数定义为任一满足 $\sum\limits_{y\in E} P_{xy} \cdot f(y) \leqslant f(x)$(一切 x) 的非负函数 f，其中 $P_{xy} = P_{xy}(1)$.

$P_{xz}(t) > 0$(一切 $x, z \in E, t \geqslant 0$)，因 f 过份，有

$$f(x) \geqslant \sum_{z \in E} P_{xz}(t) f(z) \geqslant P_{xy}(t) f(y) = \infty \quad (x \in E).$$

∎

定理 4.2 设 X 是标准过程，它的自然拓扑 C_0[1,第 168 页]重合于 E 中的拓扑 C；或设 X 是基本可列过程. 则 X 常返的充要条件是任一有限过份函数是常数.

证 必要性 对基本可列过程已于定理 4.1 中证明. 设 X 为标准过程而且 $C_0 = C$，则因任一过份函数 f 是 C_0- 连续的[1,第 501 页]，故是连续(即 C- 连续)的. 由定理 4.1 可见结论正确.

充分性 对任一非空开集 U，考虑函数

$$\pi(x) = P_x(\tau_U^{(2)} < \zeta), \tag{4.6}$$

其中 $\tau_U^{(2)}$ 是 $0+$ 后首达 U 的时刻. 如果 X 是标准过程，[1,第 498 页]已证明 $\pi(x)$ 是过份函数；如果 X 是基本可列过程，也可同样证明 $\pi(x)$ 过份. 根据假定，$\pi(x) \equiv C$(常数). 然而，利用 X 的右连续性或右下半连续性，对任意 $x \in U$，有 $\pi(x) = 1$. 故 $C = 1$；而且 $P_x(\tau_U^{(2)} = \tau_U) = 1$，其中 τ_U 表示首达 U 的时刻. 这样便证明了：$P_x(\tau_U < \zeta) = 1$，一切 $x \in E$. 根据定理 3.1 及注 3.1 即得证 X 的常返性. ∎

系 4.1 设 X 满足定理 4.2 中条件，$\varphi(\omega)$ 是 X 的 W- 泛函[1,第 261 页]，如 X 常返；且函数 $E_x \varphi_\infty$ 有限，则它恒等于常数(对基本可列过程不必假定有限性).

实际上，易见 $f(x) = E_x \varphi_\infty$ 是 X 的过份函数.

系 4.2 设 X 是一维区间(开或闭)中的正则连续强马氏过程[1,第 657 页]，则 X 常返的充要条件是任一有限过份函数是常数.

实际上，对这类 X，$C_0 = C$ [1,第 673 页].

现在来研究零壹律. 设 $X = (x_t, \infty, \mathscr{M}_t, P_x)$ 为取值于一般相空间$(E, \mathscr{B})$ 中的马氏过程，令 $\Pi = \bigcap_{t \geqslant 0} \mathscr{N}^t$，$\mathscr{N}^t$ 表示由$(x_u, u \geqslant t)$ 所产生的 σ 代数. 令

$$\Lambda = (A: A \in \Pi,\ \text{而且}\ \theta_t A = A,\ \text{一切}\ t \geqslant 0),$$

显然 Λ 是 Ω 中的 Π 的子 σ 代数. 如对任意 $A \in \Lambda$, 有 $P_x(A) \equiv 0$ 或 $P_x(A) \equiv 1$(一切 $x \in E$), 就说对 X 的强无穷远零壹律(简称强零壹律)成立.

关于零壹律的研究详见[5], 这里对连续标准过程给出一完满的结果. 以下调和函数是指对 X 在全 E 中调和函数[1, 524 页]而言的.

定理 4.3 为使强零壹律对不断*连续标准过程 X 成立, 充要条件是 X 的任一非负有界的调和函数是常数.

证 **充分性**. 设 $A \in \Lambda$, 则 $P_x(A)$ 作为 x 的函数非负有界 $\mathscr{B}$ 可测, 而且对任一马氏时刻 τ, 由于 $\theta_\tau A = A$, 有

$$P_x(A) = P_x(\theta_\tau A) = E_x E_{x_\tau} \chi_A = E_x P_{x_\tau}(A),$$

其中 χ_A 表示 A 的特征函数, 于是 $P_x(A)$ 在 E 中调和. 根据假定 $P_x(A) \equiv C$ (C—— 常数). 又因 $A \in \Lambda$, 故

$$P_x(A|x_t) = P_x(\theta_t A|x_t) = P_{x_t}(A) \quad (P_x\text{- 几乎})$$

$$\chi_A = \lim_{n\to\infty} P_{x_n}(A) = C \qquad (P_x\text{- 几乎})$$

从而 $C = 0$ 或 1.

必要性. 设 X 是连续标准过程, 于是 X 的任一非负有界调和函数 $f(x)$ 必为过份函数甚至是 I- 函数[1,第 507 页]. 实际上, 由[1,定理 12.4]知 f 是过份函数, 然后由调和函数及 I- 函数的定义即知 f 也是 I- 函数. 故由[1,定理 12.7]得

$$f(x) = E_x(\chi_{\Omega'} \lim_{t\uparrow\infty} f(x_t)) \ (\text{一切}\ x \in E), \qquad (4.7)$$

其中 $\Omega' = \bigcap_n \bigcup_{r\in A} (x_r \in E\setminus\Gamma_n)$, A 为非负有理数集而 Γ_n 为 E 中任一紧集列**, $\Gamma_n \uparrow E$. 记 $\eta = \chi_{\Omega'} \lim_{t\uparrow\infty} f(x_t)$, 则

$$\theta_s \eta = \theta_s \chi_{\Omega'} \lim_{t\uparrow\infty} f(x_{s+t}) = \chi_{\Omega'} \lim_{t\uparrow\infty} f(x_t) = \eta,$$

$$\theta_s(\eta \leqslant a) = (\theta_s \eta \leqslant a) = (\eta \leqslant a) \ (s \geqslant 0),$$

---

* 其实在强零壹律的定义中已假定 X 不断.

** Ω' 与如此的 $\{\Gamma_n\}$ 的选择无关, 其实 $\Omega' = (\omega$: 轨道 $x_t(\omega)$ 外出任一紧集).

故$(\eta \leqslant a) \in \Lambda$而$\eta$为$\Lambda$可测. 根据假设强零壹律成立，$\Lambda$只含$P_x$测度为 0 或 1 的集. 于是

$$\eta(\omega) \equiv C \ (P_x\text{- 几乎});$$

此常数C可能依赖于x，故宜记为C_x. 然而实际上它与x无关，否则如说$C_x < d < C_y$，则

$$P_x(\eta \leqslant d) = 1, \quad P_y(\eta \leqslant d) = 0,$$

这与$P_z(\eta \leqslant d)$关于z恒等于0或恒等于1的假定矛盾，这样便证明了

$$\eta(\omega) \equiv C \quad (P_x\text{- 几乎，一切 } x \in E).$$

最后再用(4.7)，立得

$$f(x) = E_x\eta = E_xC = C \qquad \text{一切 } x \in E. \qquad \blacksquare$$

注 4.3 由系 4.2 及定理 4.3 可见：对一维区间中的正则连续标准过程，常返的充要条件是任一有限过份函数是常数；强零壹律成立的充要条件是任一有界非负调和函数是常数.

例 4.1 作为非常返但强零壹律成立的例可举$n(\geqslant 3)$维 Wiener 过程. 实际上，在例 3.1 中已证明此过程非常返；其次，由[1,第 581 页]知此过程的任一非负调和函数是常数，既然不妨设此过程标准，故由定理 4.3 知强零壹律成立.

10.5 在微分方程中的应用

设过程$X = (x_t, \zeta, \mathscr{M}_t, P_x)$的相空间为$(E, \mathscr{B})$. 对集$G \in \mathscr{B}$，如果$P_x(\tau_G^{(2)} > 0) = 0$，则称点$x$为$G$的瞬达点，这里$\tau_G^{(2)}$是$0+$后首达$G$的时刻.

引理 5.1 设X是标准过程或基本可列过程，则x是G的瞬达点的充要条件是

$$\lim_{t \to 0} P_x(x_u \overline{\in} G, \quad \text{一切 } u \in (0, t]) = 0; \qquad (5.1)$$

一个充分条件是

$$\lim_{t\to 0} P(t, x, G) > 0. \tag{5.2}$$

证 记 $q(t, x, G) = P_x(x_u \overline{\in} G, \text{一切} u \in (0, t])$，对于引理中的两类过程，$q(t, x, G)$ 有意义；显然它是 t 的不增函数，故存在极限 $\lim_{t\to 0} q(t, x, G) \geqslant 0$.

次令 $A_t = (x_u \overline{\in} G, \text{一切} u \in (0, t])$，则 $\lim_{t\to 0} A_t = \bigcup_{t>0} A_t$，故

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} q(t, x, G) &= P_x\left(\bigcup_{t>0} A_t\right) \\ &= P_x(\text{存在 } t = t(\omega) > 0, \\ &\quad \text{使 } x_u(\omega) \overline{\in} G, \text{一切 } u \in (0, t]) \\ &= P_x(\tau_G^{(2)} > 0),\end{aligned}$$

此得证第一结论. 今设(5.2)成立，则必存在一列 $t_n \downarrow 0$，使 $\lim_{n\to\infty} P(t_n, x, G) = a > 0$. 令 $C = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} (x_{t_n} \in G)$，则

$$\begin{aligned}P_x(C) &= \lim_{m\to\infty} P_x\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} (x_{t_n} \in G)\right) \\ &\geqslant \lim_{n\to\infty} P(t_n, x, G) = a > 0.\end{aligned}$$

但如 $\omega \in C$，则必 $\tau_G^{(2)} = 0$，故 $P_x(\tau_G^{(2)} > 0) \leqslant 1 - a < 1$. 对于引理中两类过程，$(\tau_G^{(2)} > 0) \in \overline{\mathscr{N}}_{0+0}$，$\overline{\mathscr{N}}_{0+0} = \overline{\mathscr{N}}_0$，故由无穷近零壹律[1, 124页] 得 $P_x(\tau_G^{(2)} > 0) = 0$.

称点 x 为 G 的规则界点，如 $x \in G' = \overline{G} \cap (E \setminus G)$，而且 x 是 $E \setminus G$ 的瞬达点，这定义与[1，536页]上的一致. 如果 G' 中的点都规则，就说 G 有规则边界.

设 E 为 l 维欧氏空间，在 E 中给定二级微分算子 D：

$$Df(x) = \sum_{i,j=1}^{l} a^{ij}(x) \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{l} b^i(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}, \tag{5.3}$$

$x = (x_1, \cdots, x_l) \in E$，以下恒假定

(A) 函数 $a^{ij}(x)$，$b^i(x)$ $(i, j = 1, \cdots, l)$ 有界而且在 E 中满足具同一指数 $\lambda > 0$ 的 Hölder 条件；

(B) 存在常数 $\gamma > 0$，使对任意 $x \in E$，任一组实数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_l$，

有

$$\sum_{i,j=1}^{l} a^{ij}(x)\lambda_i\lambda_j \geqslant \gamma \sum_{i=1}^{l} \lambda_i^2.$$

根据[1,定理 5.11]，存在扩散 $\hat{C}$- 过程 X_D，它的转移概率密度 $p(t, x, y)$ 是方程$\frac{\partial u}{\partial t} = Du$ 的基本解，导出算子是 D，此种过程唯一(唯一性见[1,第 799 页])而且不断*. 下定理中，所谓"G 有规则边界"是对 X_D 而言.

定理 5.1 设微分算子 D 满足条件(A)，(B)及

(C) $a^{ij}(x)$、$b^i(x)(i, j = 1, \cdots, l)$ 三次可导，

则下二条件等价：

(i) 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Du \tag{5.4}$$

的基本解 $p(t, x, y)$[1,第798页]对某 $x \in E$ 及某开集 G，$\overline{G}$ 紧(因而对任一 $x \in E$，任一非空开集 G，使 $\overline{G}$ 紧)，有

$$\int_0^\infty \int_G p(t, x, y)\mathrm{d}y\mathrm{d}t = \infty. \tag{5.5}$$

(ii) 对任意具有规则边界的区域 G，使 $\overline{G} \subset E$，及 G' 上任意连续函数 $f(x)$，外 Dirichlet 问题

$$\left.\begin{aligned} Du &= 0, \quad & x \in E \backslash G, \\ u &= f, \quad & x \in G' \end{aligned}\right\} \tag{5.6}$$

有唯一有界解.

证 如能证明条件(i)，(ii)都等价于过程 X_D 的常返性，则定理得证.

注意 $p(t, x, y)$ 是 X_D 的转移概率密度，$P(t, x, G) = \int_G p(t, x, y)\mathrm{d}y$，故由定理 3.2 知(i)等价于过程 X_D 的常返性.

对于 X_D，利用[1，第 537 页]上的证法，不难看到：如果 x 是

---

* X_D 不断的证明已由赵昭彦给出.

G 的规则界点，那么 x 也是在[3,第 205 页]的定义下规则的. 根据[3，引理 5.2]，条件(ii)等价于条件：

(iii) 存在紧集 K，使对每 $x \in E$ 有

$$P_x(\text{存在 } t \geqslant 0, \text{使 } x_t \in K) = 1.$$

因此，只要证明(iii)等价于 X_D 的常返性. 不妨设 X_D 标准. 如 X_D 常返，则对任意非空开集 U，如 $\overline{U}$ 紧，由定理 3.1，$P_x(\tau_U < \zeta) = 1$，一切 $x \in E$. 但 $x(\tau_U) \in \overline{U}$，故取 $K = \overline{U}$，即得(iii). 反之，如(iii)成立，由 X_D 的强 Feller 性，并注意对 X_D 有 $P(t, x, G) > 0$(一切 $t > 0$，$x \in E$，G-非空开集)，采用[3，第 198 页]的证法，即知 X_D 常返. ∎

定理 5.2 设 D 满足 A，B 而且对应的 X_D 不断，则下二条件等价：

(i) 方程 $Du = 0(x \in E)$ 的任一非负有界二次连续可导解为常数.

(ii) 对 X_D 强零壹律成立.

证 不妨设 X_D 标准. $Du = 0(x \in E)$ 的全体非负有界二次连续可导解重合于 X_D 的全体非负有界调和函数[1,第549页]，于是由定理 4.3 即得证. ∎

参 考 文 献

[1] Дынкин Е Б. Марковский процессы. Москва, Госуд. издат. физмат. литер., 1963.(英译本见第 4 篇中的参考文献[6])

[2] Колмогоров А Н. Цепи маркова со счетным нислом возможных состояний. Бюлл. МГУ, 1937, 1(3): 1～16

[3] Хасьминский Р З. Эргодические свойства возвратных диффузионных процессов и стабилизация решений задачи Коши для параболических Уравнений. Теория вероятн. и ее примен. 1960, 5: 196～214

[4] Ueno T. On recurrent Markov processes. Kodai Math. Semin. Rep., 1960, 12: 109～142

[5] 王梓坤. 马尔可夫过程的零壹律. 数学学报, 1965, 15: 342～353

[6] 施仁杰. 可列马尔可夫过程的随机时间替换. 南开大学自然科学学报(数学专刊), 1964, 5(5): 51～88

[7] Chung K L. Markov chains with stationary transition probabilities. Berlin: Springer-verlag, 1967.

[8] 邓肯(Дынкин E Б). 马尔可夫过程论基础. 王梓坤译. 北京: 科学出版社, 1962.

第 11 篇 暂留马尔可夫过程向无穷远的徘徊

我们研究暂留的齐次、右连续强马尔可夫过程趋于无穷远的方式，得到：在一定条件下，过程必须通过一切方向绕无穷远点作无穷次徘徊后方趋于无穷远.

设 $X = \{x_t, P_x, t \geqslant 0\}$ 为右连续齐次强马尔可夫过程，定义于可测空间$(\Omega, \mathscr{F})$上，取值于 d 维欧氏空间$(R^d, \mathscr{B}^d)$，$\mathscr{B}^d$ 为 d 维 Borel σ- 代数，$x \in R^d$. 称 X 为暂留的(transient)，如 $\forall\ x \in R^d$，有

$$P_x(\lim_{t\to\infty}|x_t| = \infty) = 1. \tag{1}$$

我们的目的是研究 $|x_t|$ 如何趋于 ∞，譬如说，当 t 充分大时，x_t 是否永远只停留在 R^d 的某一子区域(如第一象限)中而趋向 ∞?以下会看到，在一定条件下，答案是否定的. 直观地说，X 必须通过一切方向绕无穷远点作无穷次徘徊后方趋于 ∞，并到达任一锥中无穷多次. 以下 x_t 也记为 $x(t)$.

以 T_t 及 $\theta_t(t \geqslant 0)$ 分别表示 X 的转移半群及推移算子，对 $B \in \mathscr{B}^d$，以 h_B 表示 B 的首中时，即

$$h_B = \begin{cases} \inf(t > 0,\ x_t \in B), & \text{如右方 } t \text{ 集非空}; \\ \infty, & \text{否则}. \end{cases}$$

称非负 $\mathscr{B}^d$ 可测函数 $f(x)$，$x \in R^d$ 为 X 的过份函数，如

$$\forall\ t \geqslant 0,\ x \in R^d,\ T_t f(x) \leqslant f(x); \tag{2}$$

$$\forall\ x \in R^d，当\ t \to 0\ 时，T_t f(x) \to f(x).$$

如(2)中取等式，则称此过份函数为 X 的调和函数.

如果 X 的任一过份函数是一常数，X 有什么性质?在[1]中证明了：如 X 是标准过程(定义见[3]第3章 §3)，其自然拓扑(见[3]第4章 §2)重合于相空间中的拓扑；或 X 为马氏链，其转移概率满足 $P_{ii}(t)\to 1(t\to 0$, 一切 $i)$，则 X 为常返(recurrent)过程的充要条件是 X 的任一有限过份函数是常数. 其后在[2] §3.7中又证明了：如 X 为Hunt过程，而且相空间至少含二点，则 X 的任一过份函数为常数的充要条件是每一几乎 Borel 集或为常返，或为极集(polar).

至于调和函数，类似的结果较少. 在[1]中证明了：若 X 为不断、连续的标准过程，则 X 的任一非负有界调和函数为常数的充要条件是对 X 的强零壹律成立，即：对任 $A\in\mathscr{A}$，有

$$P_x(A)\equiv 0 \text{ 对一切 } x\text{，或 } P_x(A)\equiv 1 \text{ 对一切 } x;$$

这里 $\mathscr{A}=\{A: A\in\bigcap_{t\geqslant 0}\sigma(x_u, u\geqslant t)$，而且 $\theta_t A=A$, $t\geqslant 0\}$，即全体不变尾事件所成的 σ- 代数.

今给出另一结果，可与上述关于常返性的结果比较.

引理1 设 X 为右连续强马尔可夫过程，满足条件(A)：X 的任一有界调和函数为常数. 则对任意 $B\in\mathscr{B}^d$，只有两种可能：

(i) 或者 $\forall x\in R^d$, $\forall t\geqslant 0$，有 $P_x(\theta_t(h_B<\infty))\equiv P_x(\exists s>t, x_s\in B)=1$;

(ii) 或者 $\forall x\in R^d$，有 $P_x(\theta_t(h_B<\infty))\to 0$, $(t\to\infty)$.

证 令

$$\begin{aligned} g(x) &\equiv P_x(h_B<\infty)\geqslant P_x(\theta_t(h_B<\infty)) \\ &= T_t g(x)\downarrow f(x)\geqslant 0,\ (t\to\infty). \end{aligned} \tag{3}$$

在 $T_{s+t}g(x)=T_tT_sg(x)$ 中，令 $s\to\infty$，得 $f(x)=T_tf(x)$. 故 $f(x)$ 调和. 由假定(A)，$f(x)\equiv c$, c 为非负常数.

如 $c=0$，由(3)得(ii).

如 $c>0$，令 $Q_B(t,x,A)=P_x(h_B>t, x_t\in A)$，在

$$P_x(t<h_B<\infty)=\int_{R^d}Q_B(t,x,\mathrm{d}y)g(y)\geqslant cP_x(h_B>t)$$

中，令 $t \to \infty$，得 $0 = cP_x(h_B = \infty)$. 从而 $P_x(h_B < \infty) \equiv 1$；于是 $\forall\, t \geqslant 0$，

$$P_x(\theta_t(h_B < \infty)) = E_x P_{x(t)}(h_B < \infty) = 1. \qquad \blacksquare$$

周知 $R^d(d \geqslant 1)$ 中布朗运动及对称稳定过程满足条件(A). 今引用 Kelvin 变换.

设已给 R^d 中单位向量 u 及常数 $b > 0$. 称集

$$C_b^u \equiv \{y:\ y \in R^d,\ |y \cdot u| > b\|y\|\} \tag{4}$$

为锥，其顶点为 O，母线为 u，b 则反映张角的大小，$y \cdot u$ 表示 R^d 中的内积，$\|y\|^2 = y \cdot y$，对任意常数 $a > 0$，分别称

$$B_{a,b}^u = C_b^u \cap (y:\ \|y\| \geqslant a),$$

$$V_{a,b}^u = C_b^u \cap (y:\ \|y\| < a) \tag{5}$$

为锥底和锥顶.

考虑 R^d 中点 x 的 Kelvin 变换 K，它把 x 变为点 x^*：

$$x^* \equiv Kx = \frac{r^2}{\|x\|^2} \cdot x, \tag{6}$$

其中 $r > 0$ 为常数. 此变换是关于以原点为心、以 r 为半径的圆周的反演. 显然

$$\|x^*\| = r^2/\|x\|.$$

容易看出，K 把锥底 $B_{a,b}^u$ 变为锥顶 $V_{r^2/a,b}^u$. 实际上

$$\begin{aligned} KB_{a,b}^u = (y^*:\ & \frac{\|y\|^2}{r^2} \cdot |y^* \cdot u| \geqslant b\|y\|, \\ & \frac{r^2}{\|y^*\|} \geqslant a) \\ = & \left(y^*:\ |y^* \cdot u| \geqslant b\|y^*\|,\ \|y^*\| \leqslant \frac{r^2}{a}\right) \\ = & V_{r^2/a,b}^u. \end{aligned}$$

令 $x_t^* = Kx_t$，于是 $\{x_t\}$ 在 ∞ 附近的行为，反映为 $\{x_t^*\}$ 在原点 O 附近的行为.

我们还需要条件(B)：对每锥 K，有 $\varliminf\limits_{t\to\infty} P_0(x_t \in K) > 0$.

下面定理表明：对任意锥顶 $V_{\varepsilon,b}^u$，不论 u 表示何方向，不论锥顶的高 ε 如何小，也不论锥的张角如何小，当 $t \to \infty$ 时，以概率1，

$X^* = \{x_t^*, t \geqslant 0\}$ 到 $V_{\varepsilon,b}^u$ 中无穷多次，亦即 X 到 $B_{\rho/\varepsilon,b}^u$ 中无穷多次. 以下 $\bar{A}$ 表示 A 的闭包.

定理 1 设 X 为暂留、右连续、强马尔可夫过程，满足条件(A)、(B). 则对任意单位向量 u，任意 $\varepsilon > 0$ 及 $b > 0$，任意 $x \in R^d$，存在一列 $t_m \equiv t_m(\omega) \uparrow \infty$，使

$$P_x(x^*(t_m) \in \bar{V}_{\varepsilon,b}^u,\ m = 1, 2, \cdots) = 1. \tag{7}$$

证 任取锥 K，由(B)有

$$\lim_{t\to\infty} P_0(\theta_t(h_K < \infty)) \geqslant \lim_{t\to\infty} P_0(x_t \in K) > 0.$$

由引理 1，$P_x(h_K < \infty) \equiv 1$. 今任取二锥 C^u 及 C^v，使二者无公共点. 由刚才所证，二者皆为常返集. 设 t'_1 为 C^u 的首中时，s_1 为 t'_{1+1} 以后 C^v 的首中时；一般地，t'_{m+1} 为 s_m 以后 C^u 的首中时，s_{m+1} 为 $t'_{m+1} + 1$ 以后 C^v 的首中时，于是

$$P_x(x(t'_m) \in \bar{C}^u) = 1,\ P_x(t'_m \to \infty) = 1,$$

故存在 $N = N(\omega) > 0$，使

$$P_x(x^*(t'_m) \in \bar{V}_{\varepsilon,b}^u,\ \text{一切}\ m > N) = 1.$$

取 $t_m = t'_{N+m}$ 即得证(7). ∎

关于条件(B)的讨论：许多自相似过程，如布朗运动及对称稳定过程，皆满足(B). 称 X 为自相似过程，如存在常数 $\alpha > 0$，$\beta > 0$，使对任意 $d > 0$，二过程 X 与 $\{d^{-\alpha}x(d^\beta t), t \geqslant 0\}$ 同分布. 对自相似过程 X，由于 $d^\alpha K = K$，故

$$\begin{aligned} P_0(x(t) \in K) &= P_0(d^{-\alpha}x(d^\beta t) \in K) \\ &= P_0(x(d^\beta t) \in K). \end{aligned}$$

既然 $d > 0$ 任意，故 $P_0(x(t) \in K)$ 关于 t 为常数. 如对某 $t > 0$，X 有转移密度(关于勒贝格测度)$p(0, t, y) > 0$，(a. s. y)，则(B)显然满足.

参考文献

[1] 王梓坤. 马尔可夫过程的零壹律. 数学学报，1965，15(3)：342～353

[2] Chung K L. Lectures From Markov Processes to Brownian Motion. Berlin:Springer-Verlag,1980.

[3] Дынкин Е Б. Марковский Процессы. Госуд. издат. Физмат. Литер. 1963. (英译本见第 4 篇的文献[6])

[4] 王梓坤. 随机过程论. 北京:科学出版社,1965.

第12篇 扩散过程在随机时间替换下的不变性

12.1 扩散过程的随机时间替换

采用[1]中的定义与记号. 我们的目的是研究在随机时间替换下，扩散过程仍然变为扩散过程的充要条件，并讨论连系于典范扩散过程的微分方程及特征算子方程的一些性质. 扩散过程的定义见[1，217页].

设(E, F)为光滑流形，维数为l[1，214页]*，$X=(x_t, \zeta, \mathscr{M}_t, P_x)$为$(E, F)$中的扩散过程(因而自然是马氏过程)，不失一般性，可以假定X是完全的[1，123页]. X的特征算子记为$\mathfrak{A}$[1，203页]，导出微分算子记为D[1，221页]. 任取$x \in E$，以$\mathfrak{D}(x)$表示一切在点x的邻域内有定义而且二次连续可微的函数的集，以F_x表示一切定义域包含x的座标系$\psi \in F$的集，则对任意$f \in \mathfrak{D}(x)$，任意$\psi=(x^1, \cdots, x^l) \in F_x$，有[1，215页]

$$Df(x)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{l} a^{ij}(x)\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^i \partial x^j}$$

---

* 这里光滑流形的定义见[1，214页].

$$+\sum_{i=1}^{l} b^i(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x^i}-c(x)f(x), \tag{1.1}$$

其中对任意 x，矩阵 $(a^{ij}(x))$ 非负定，$c(x)\geqslant 0$；换句话说，D 是非负定的二级微分算子.

对 D，引进条件：对任意 $x\in E$，

$$\sum_{i,j=1}^{l}|a^{ij}(x)|+\sum_{i=1}^{l}|b^i(x)|+|c(x)|>0. \tag{1.2}$$

现在考虑 X 的齐次连续可加泛函 $\varphi_s^t(\omega)$，$(0\leqslant s\leqslant t<\zeta(\omega))$，[1，第 6 章]，假定

$$\varphi_s^s(\omega)=0,\ 0\leqslant s<\zeta(\omega); \tag{1.3}$$

$$\varphi_s^t(\omega)>0,\ 0\leqslant s<t<\zeta(\omega). \tag{1.4}$$

令 $\tilde{\zeta}(\omega)=\varphi_{\zeta-0}(\omega)$，$\tau_t(\omega)=\sup(u: \varphi_u^0(\omega)\leqslant t)$，如 $0\leqslant t<\tilde{\zeta}(\omega)$. 已经知道[1，定理 10.10]，$\tilde{X}=(x_{\tau_t},\tilde{\zeta},\mathscr{M}_{\tau_t},P_x)$ 是 E 中的齐次马氏过程，称 $\tilde{X}$ 为自 X 经 φ_s^t 变换得来，以下简记 φ_t^0 为 $\varphi(t)$.

试研究何时 $\tilde{X}$ 也是扩散过程

定理 1.1 设 X 为完全的扩散过程，满足(1.2)；$\varphi_s^t(\omega)(0\leqslant s\leqslant t<\zeta(\omega))$ 是 X 的齐次连续可加泛函，满足(1.3)(1.4)；$\tilde{X}$ 为自 X 经 φ_s^t 变换得来的马氏过程. 则 $\tilde{X}$ 是扩散过程的充要条件是

$$C\text{-}\lim_{U\downarrow x}\frac{E_x\varphi(\eta_U)}{E_x\eta_U}=a(x)>0\quad(一切\ x\in E) \tag{1.5}$$

(U 为含 x 的开集，其闭包 $\bar{U}$ 紧，η_U 为首出 U 的时间[1，152 页])*. 此时 $\tilde{X}$ 的特征算子 $\tilde{\mathfrak{A}}$ 在点 x 的定义域 $\mathscr{D}_{\tilde{\mathfrak{A}}}(x)$ 包含 $\mathfrak{A}$ 在点 x 的定义域 $\mathscr{D}_{\mathfrak{A}}(x)$，而且对 $f\in\mathscr{D}_{\mathfrak{A}}(x)$，有

$$\tilde{\mathfrak{A}}f(x)=\mathfrak{A}f(x)/a(x). \tag{1.6}$$

如补设(1.5) 中的极限 $a(x)<\infty$，则

---

* 因 X 连续，η_U 重合于 0+ 后首出 U 的时刻；(1.5) 中极限的详细意义见[1，第 201 页]，(1.5) 中 C 表 E 中的拓朴.

$$\mathscr{D}_{\tilde{\mathfrak{A}}}(x) = \mathscr{D}_{\mathfrak{A}}(x). \tag{1.7}$$

证 由 X 的连续性,$E_x\eta_U > 0$, $(x \in U)$. 任取座标系 $\psi = (x^1, \cdots, x^l) \in F_{x_0}$, 令

$$\Delta^{ij}(x) = (x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j),\ \Delta^i(x) = x^i - x_0^i,$$

则有

$$a^{ij}(x_0) = \mathfrak{A}\,\Delta^{ij}(x_0)$$

$$= C\text{-}\lim_{U \downarrow x_0} \frac{\int_{U'} \Delta^{ij}(x)\pi_U(x_0, \mathrm{d}x)}{E_{x_0}\eta_U}. \tag{1.8}$$

$$b^i(x_0) = \mathfrak{A}\,\Delta^i(x_0)$$

$$= C\text{-}\lim_{U \downarrow x_0} \frac{\int_{U'} \Delta^i(x)\pi_U(x_0, \mathrm{d}x)}{E_{x_0}\eta_U}. \tag{1.9}$$

$$c(x_0) = -\mathfrak{A}\,1(x_0)$$

$$= C\text{-}\lim_{U \downarrow x_0} \frac{1 - \pi_U(x_0, U')}{E_{x_0}\eta_U}. \tag{1.10}$$

其中 $U' = \overline{U} \cap (E\backslash U)$ 是 U 的边界，而

$$\pi_U(x_0, \Gamma) = P_{x_0}(x_{\eta_U} \in \Gamma),\ (\Gamma \subset U').$$

由(1.2)、(1.8)、(1.9)、(1.10)知：对 x_0 的充分小邻域 V(精确些，即存在含 x_0 的开集 U, $\overline{U}$ 紧，使对一切开集 V, $x_0 \in V \subset U$, $\overline{V}$ 紧)，有

$$E_{x_0}\eta_V < \infty\ (x_0 \in E).$$

以下对 $\tilde{X}$ 的量都于其上标以"～"号，对每固定的 ω, $\tau_t(\omega)$ 把 $[0, \tilde{\zeta}(\omega)]$ 连续地变到 $[0, \zeta(\omega)]$ 上，故由 X 的连续性得 $\tilde{X}$ 的连续性，而且[1, 447 页]

$$\pi_U(x, A) = \tilde{\pi}_U(x, A).$$

因此，如 $f \in \mathfrak{D}_{\tilde{\mathfrak{A}}}(x)$, 则

$$\tilde{\mathfrak{A}}\, f(x) = C\text{-}\lim_{U \downarrow x} \frac{\int_{U'} f(y)\pi_U(x, \mathrm{d}y) - f(x)}{E_x\tilde{\eta}_U}, \tag{1.11}$$

其中由 $\tilde{X}$ 的连续性知 $E_x\tilde{\eta}_U > 0$，$(x \in U)$，回忆

$$\mathfrak{A}f(x) \doteq C\text{-}\lim_{U \downarrow x} \frac{\int_{U'} f(y)\pi_U(x, \mathrm{d}y) - f(x)}{E_x\eta_U}. \quad (1.12)$$

今对任意固定的 $x_0 \in E$，定义函数

$$g(x) = \begin{cases} \sum_{i,j=1}^{l} e_{ij}(x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j), \\ \qquad\qquad \text{如} \sum_{i,j=1}^{l} |a^{ij}(x_0)| > 0; \\ \sum_{i=1}^{l} e_i(x^i - x_0^i), \text{如} \sum_{i,j=1}^{l} |a^{ij}(x_0)| = 0, \\ \qquad\qquad \text{但} \sum_{i=1}^{l} |b^i(x_0)| > 0; \\ -1, \text{如} \sum_{i,j=1}^{l} |a^{ij}(x_0)| + \sum_{i=1}^{l} |b^i(x_0)| = 0, \\ \qquad\qquad (\text{此时由}(1.2)\ c(x_0) > 0). \end{cases} \quad (1.13)$$

其中 e_{ij}(及 e_i) 为任意常数，满足 $\sum_{i,j=1}^{l} e_{ij}a^{ij}(x_0) \neq 0$，$e_{ij} = e_{ji}$ $\left(\text{及} \sum_{i=1}^{l} e_i b^i(x_0) \neq 0\right)$.

由于 X 是扩散而且 $g(x) \in \mathscr{D}(x_0)$，显然

$$g(x) \in \mathscr{D}_{\mathfrak{A}}(x_0), \quad \mathfrak{A}g(x_0) \neq 0. \quad (1.14)$$

(后一式由 $g(x)$ 的定义直接算出). 由此及(1.12)可见：对一切含 x_0 的充分小的邻域 U，有

$$\int_{U'} \pi_U(x_0, \mathrm{d}y)g(y) - g(x_0) \neq 0.$$

今设 $\tilde{X}$ 扩散. 由扩散过程的定义，函数 1，$\Delta^i(x)$，$\Delta^{ij}(x)$ 都属于 $\mathscr{D}_{\tilde{\mathfrak{A}}}(x_0)$，所以 $g(x) \in \mathfrak{D}_{\tilde{\mathfrak{A}}}(x_0)$，而且

$$0 \leqslant C\text{-}\lim_{U \downarrow x_0} \frac{E_{x_0}\tilde{\eta}_U}{E_{x_0}\eta_U}$$

$$= C\text{-}\lim_{U \to x_0} \frac{\left[\int_{U^c} \pi_U(x_0, \mathrm{d}y)g(y) - g(x_0)\right] / E_{x_0}\eta_U}{\left[\int_{U^c} \pi_U(x_0, \mathrm{d}y)g(y) - g(x_0)\right] / E_{x_0}\tilde{\eta}_U}$$

$$= \frac{\mathfrak{A}\, g(x_0)}{\tilde{\mathfrak{A}}\, g(x_0)} \leqslant \infty. \tag{1.15}$$

(1.15) 中极限不可能等于 0，实际上，(1.14) 中已证 $\mathfrak{A}g(x_0) \neq 0$；由于 $g \in \mathscr{D}_{\tilde{\mathfrak{A}}}(x_0)$，故 $\tilde{\mathfrak{A}}\, g(x_0)$ 有穷，从而(1.15) 中 $\dfrac{\mathfrak{A}\, g(x_0)}{\tilde{\mathfrak{A}}\, g(x_0)} \neq 0$. 其次，(1.15) 中的 $\dfrac{E_{x_0}\tilde{\eta}_U}{E_{x_0}\eta_U} \geqslant 0$，故得证

$$0 < a(x_0) = C\text{-}\lim_{U \downarrow x_0} \frac{E_{x_0}\tilde{\eta}_U}{E_{x_0}\eta_U} \leqslant \infty \quad (\text{一切 } x_0 \in E). \tag{1.16}$$

注意，由于 X、φ 都连续，而且满足(1.4)，故

$$E_{x_0}\tilde{\eta}_U = E_{x_0}\varphi(\eta_U) \ (x_0 \in U). \tag{1.17}$$

由此及(1.17) 即得证第一结论的必要性部分.

今设对一切 x，存在极限(1.5)，则 $\tilde{X}$ 必扩散，为此，只要证 $1, x^i, x^ix^j \in \mathscr{D}_{\tilde{\mathfrak{A}}}(x)$ 对某一座标系成立. 但由假定 X 扩散. 故对任一座标系[1, 218 页]，$1, x^i, x^ix^j \in \mathscr{D}_{\mathfrak{A}}(x)$，因而只要证 $\mathscr{D}_{\mathfrak{A}}(x) \subset \mathscr{D}_{\tilde{\mathfrak{A}}}(x)$. 任取 $f \in \mathscr{D}_{\mathfrak{A}}(x)$，有

$$C\text{-}\lim_{U \downarrow x} \frac{\int_{U^c} \pi_U(x, \mathrm{d}y)f(y) - f(x)}{E_x\tilde{\eta}_U}$$

$$= C\text{-}\lim_{U \downarrow x} \frac{\int_{U^c} \pi_U(x, \mathrm{d}y)f(y) - f(x)}{E_x\eta_U} \frac{E_x\eta_U}{E_x\tilde{\eta}_U}. \tag{1.18}$$

注意(1.17) 及(1.5)，即得上式中的极限为 $\dfrac{\mathfrak{A}\, f(x)}{a(x)}$，即 $f \in$

$D_{\alpha}^{\sim}(x)$ 而且(1.6)式成立，从而第一第二结论都完全证明了.

最后设 $a(x)<\infty$. 为证(1.7)，只要证 $\mathscr{D}_{\tilde{\alpha}}(x)\subset\mathscr{D}_{\alpha}(x)$. 任取 $g\in\mathscr{D}_{\tilde{\alpha}}(x)$，以此 g 代入(1.18)中的 f，并在(1.18)中将 $\tilde{\eta}_U$、η_U 互换，即得

$$\alpha\, g(x)=\tilde{\alpha}\, g(x)\cdot a(x),$$

故 $g\in\mathscr{D}_{\alpha}(x)$，并且附带证明了：$X$、$\tilde{X}$ 的导出微分算子的系数成比例. ∎

注 1.1 由(1.5)及定理1.1第三结论可见，如二可加泛函都对同一 $a(x)$ 满足(1.5)，$0<a(x)<\infty$，一切 x，那么它们产生的二 $\tilde{X}$ 具有相同的 $\tilde{\alpha}$，因此如固定一个 $a(x)$，可加泛函 φ 的选择有很大的自由性，特别，如 $a(x)$ 连续，则只要取 φ 为积分型泛函

$$\varphi_t^s=\int_s^t a(x_u)\mathrm{d}u$$

实际上，由

$$\frac{E_x[a(x)-\varepsilon]\tau_U}{E_x\tau_U}\leqslant\frac{E_x\int_0^{\tau_U}a(x_u)\mathrm{d}u}{E_x\tau_U}\leqslant\frac{E_x[a(x)+\varepsilon]\tau_U}{E_x\tau_U},$$

可见 $$0<a(x)=C\text{-}\lim_{U\downarrow x}\frac{E_x\varphi(\tau_U)}{E_x\tau_U}<\infty.$$

注 1.2 设 X 为 Wiener 过程，φ 为对应于测度 μ 的 S 泛函[1，374 页]，这时 E 为 l 维欧氏空间，

$$C\text{-}\lim_{U\downarrow x}\frac{E_x\varphi(\tau_U)}{E_x\tau_U}=C\text{-}\lim_{U\downarrow x}\frac{\int_U g(x,y)\mu(\mathrm{d}y)}{\int_U g(x,y)\mathrm{d}y}.$$

$g(x,y)$ 为过程 X 在有界开集 U 上的格林函数[1，第 566 页].

12.2 Dirichlet 问题与特征算子方程

以下设 E 为 l 维欧氏空间，在 E 中考虑微分算子

$$D=\sum_{i,j=1}^{l}a^{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}+\sum_{i=1}^{l}b^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{2.1}$$

假定 D 的系数满足条件

(A) $a^{ij}(x)$, $b^i(x)(i, j=1, \cdots, l)$ 有界而且在 E 中满足具同一指数 $\lambda>0$ 的 Hölder 条件；

(B) 存在常数 $\gamma>0$，使对任一 $x\in E$，任一组实数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_l$，有

$$\sum_{i,j=1}^{l}a^{ij}(x)\lambda_i\lambda_j\geqslant\gamma\sum_{i=1}^{l}\lambda_i^2,$$

则必存在唯一的不断的* 扩散过程 X_D，转移密度 $p(t, x, y)$ 是 $\frac{\partial u}{\partial t}=Du$ 的基本解，而且导出微分算子是 D，称此 X_D 为典范扩散过程[1，238 页]，它的特征算子记为 $\mathfrak{A}$，样本函数记为 $x_t(\omega)$，$t\geqslant 0$. 以下所谓"G 有规则边界"是对 X_D 而言[1，第 537 页].

定理 2.1 设 D 满足(A)(B)，对任意具有规则边界的区域 G(使 $\overline{G}\subset E$) 及 $G'[=\overline{G}\cap(E\backslash G)]$ 上的任意连续函数 $f(x)$，外 Dirichlet 问题

$$\left.\begin{aligned}&Du=0, && x\in E\backslash G;\\&u=f, && x\in G'.\end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

有唯一有界解的充要条件是

$$\lim_{t\to\infty}|x_t|=0\ (P_x\text{- 几乎，一切 } x\in E). \tag{2.3}$$

证 设 U 为任一非空有界开集，τ 表示首出 U 的时刻，由于对 X_D，$p(t, x, y)>0$ 对一切 $t>0$ 及 x，$y\in E$ 成立，故 $P_x(\tau=$

---

* 唯一性见[1，799 页]，不断性由赵昭彦证明.

$\infty) < 1$(一切 $x \in E$). 既然 X_D 还是连续的强 Feller 过程，故可用[1，定理 13.7] 而知 $E_x\tau$ 有界，于是更有

$$P_x(\tau < \infty) = 1 \ (\text{一切 } x \in E). \tag{2.4}$$

今取 $U_n = [x: |x| < n]$，n 为正整数，以 τ_n 表首出 U_n 时刻，由(2.4)，$P_x(\tau_n < \infty) = 1$. 不妨设 X_D 为标准过程，由标准性知[1，第 161 页] $P_x(\tau_n \to \infty) = 1$. 既然 $|x_{\tau_n}| = n$，得

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} |x_t| = \infty \quad (P_x\text{-几乎，一切 } x \in E).$$

由此易知条件(2.3) 与 X_D 的常返性等价[2]，因而也与外 Dirichlet 问题有唯一有界解等价. ∎

注 2.1 由于上面所证的 $P_x(\tau_n \to \infty) = 1$ 及[3，引理 4.1]，知方程

$$\mathfrak{A} u - u = 0$$

有 E 中无正有界解.

定理 2.2 设开集 G 有紧闭包而且有规则边界，$V(x)(x \in G)$ 是有界非负连续函数，则存在 $\beta > 0$，使对一切正数 $\lambda < \beta$，方程

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{A} u + \lambda V u = 0 \qquad (x \in G); \\ &u = 1 \qquad\qquad\quad\ (x \in G'). \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

在 $\overline{G}$ 中有正解.

证 由(2.4) 及[1，544 页]，存在 $t > 0$ 及 $\alpha > 0$，使

$$\sup_{x\in E} P_x(\tau > t) = \alpha < 1. \tag{2.6}$$

τ 为首出G的时刻(因而它不大于$0+$后首出G时刻)，其次令 $\xi = \int_0^\tau V(x_s)\mathrm{d}s$，试证

$$F_\lambda(x) = E_x e^{\lambda\xi} < \infty, \ 0 \leqslant \lambda < \beta, \tag{2.7}$$

其中 β 是某正常数. 实际上，如 $\|V\| = \sup_{x\in G}|V(\lambda)| = 0$，结论显然正确. 否则令 $s = \|V\| t$，有

$$E_x e^{\lambda\xi} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} e^{\lambda(n+1)s} P_x(\xi\tau > ns)$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} e^{\lambda(n+1)s} P_x(\| V \| \tau > ns)$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} e^{\lambda(n+1)s} P_x(\tau > nt)$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} e^{\lambda \| V \| (n+1)t} \alpha^n$$

$$= e^{\lambda \| V \| t} / (1 - e^{\lambda t \| V \|} \alpha) \equiv A_\lambda,$$

故如 $\quad e^{\lambda t \| V \|} \alpha < 1$ 即 $\lambda < -\dfrac{\ln \alpha}{t \| V \|} = \beta$ 时，

$$E_x e^{\lambda \xi} \leqslant A_\lambda < \infty \ (\text{一切 } x).$$

既然 X_D 是强 Feller 过程，根据[4，定理 1]，知由(2.7) 定义的 $F_\lambda(x)$ 是(2.5) 的正解. ∎

最后，附带指出典范扩散过程 X 的一个性质. 设 $f(x)(x \in E)$ 是有界 Borel 可测函数，令

$$R_\lambda f(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t f(x) dt \ (\lambda > 0). \tag{2.8}$$

T_t 为过程的半群，则 $R_\lambda f(x)$ 是 x 的有界连续函数；又如 $f \in \hat{C}$，则 $R_\lambda f \in \hat{C}$.

实际上，因 X 是强 Feller 的，故 $T_t f(x)$ 对 x 连续，由于 $|e^{-\lambda t} T_t f| \leqslant \| f \| e^{-\lambda t}$，而后者对 t 可积，故可在(2.8) 中的积分号下取极限而知 $R_\lambda f(x)$ 对 x 连续，它显然还有界：$\| R_\lambda f \| \leqslant \| f \| / \lambda$. 其次，因 X 也是 $\hat{C}$ 过程，故如 $f \in \hat{C}$，则 $T_t f \in \hat{C}$，于(2.8) 中令 $x \to \infty$ 即得 $R_\lambda f(x) \to 0$，既然已证 $R_\lambda f$ 有界连续，故 $R_\lambda f \in \hat{C}$.

换言之，X 满足 Hunt 条件(C)[5].

参 考 文 献

[1] Дынкин Е Б. Марковские процессы. Москва: Госуд. издат. Физмат. Литер, 1963. (英译本见第 4 篇的文献[6])

[2] 王梓坤．常返马尔可夫过程的某些性质．数学学报，1966，16(2)：166～178.

[3] Хасьминский Р З. Эргодические свойства возвратных диффузионных процессов и стабилизация решений задачи Коши для параболических уравнений. Теория вероятн. и ее примен. 1960，5：196～214

[4] Хасьминский Р З. О положительных решениях уравнения $\mathfrak{A}u+Vu=0$. 同上杂志，1959，4：332～341

[5] Hunt G A. Markoff Processes and potentials. Illinois J. Math. ，1957，1：44～93，316～369. 1958，2：154～213

第13篇 Martin 边界和过份函数的极限定理

13.1 Martin 边界

1. 概论

设 I 是一可数集，$P=(P(i,j))$ 是在 I 上的转移矩阵，即满足下述条件的矩阵：

$$P(i,j)\geqslant 0,\ \sum_{j\in I}P(i,j)\leqslant 1.$$

设 $h(i)(i\in I)$ 是非负函数，如果

$$(Ph)(i):=\sum_{j\in I}P(i,j)h(j)\leqslant h(i)\ (i\in I).$$

称 h 为过份函数. 如果用等号代替不等号，且 $0<h<\infty$，称 h 为调和的. 设 μ 为 I 上的测度，如果

$$(\mu P)(j):=\sum_{i\in I}\mu(i)P(i,j)\leqslant \mu(j)\ (j\in I).$$

称 μ 为过份测度.

设 h 是一个过份函数. 如果 $I^h:=(i:0<h(i)<\infty)$ 非空，定义

$$P^h(i,j):=P(i,j)h(j)/h(i)\quad (i,j\in I^h);\qquad (1.1)$$

则 $P^h:=(P^h(i,j))$ 是 I^h 上的转移矩阵. 类似地，我们可定义 h-过份函数(即 I^h 上的对于 P^h 的过份函数)，h-调和函数，等等. 具

有状态空间 I^h 和转移矩阵 P^h 的马尔可夫链 $(x_n(\omega), \beta(\omega))$ 称为 h-链，其中 $\beta(\omega)$ 是终止时刻，整数 n 满足 $0 \leqslant n \leqslant \beta(\omega)$ 如果 $\beta(\omega) < \infty$；或者 $0 \leqslant n < \infty$，如果 $\beta(\omega) = \infty$，$\omega \in \Omega$. 如果 $\beta(\omega) \equiv \infty$，此时 $(x_n(\omega), \beta(\omega))$ 写成 $\{x_n(\omega)\}$ 或 $\{x_n\}$. 注意，1-链是具有转移矩阵 P 的马尔可夫链.

设 $P_n(i, j)$ 是 1-链的第 n 步转移概率，$P_0(i, j) = \delta_{i,j}$(Kronecker 记号)，而

$$G(i, j) := \sum_{n=0}^{\infty} P_n(i, j). \tag{1.2}$$

下面我们将总是假定 1-链非常返，即

$$G(i, j) < \infty \ (i, j \in I). \tag{1.3}$$

指定 I 上的一个测度 γ 使得

$$\gamma(i) > 0 \ (i \in I); \ \sum_{i \in I} \gamma(i) = 1.$$

定义函数

$$K(i, j) := \frac{G(i, j)}{\zeta(j)} \ (i, j \in I),$$

其中 $\zeta(j) := \sum_{i \in I} \gamma(i) G(i, j)$(不失一般性，可以假定 $\zeta(j) > 0$). 在 I 中可以引入一个距离 d，使得在此距离下，一个点列 $\{j_n\} \subset I$ 是柯西序列当且仅当：或者 $\{j_n\}$ 只包含有限多个不同的元素，或者对每个固定的 $i \in I$，$\{K(i, j_n)\}$ 是实数柯西数列. I 按 d 的完备化记为 I^*. 集合 $B := I^* \setminus I$ 称为 Martin 边界，它依赖于矩阵 P 和测度 γ. 设 $\mathscr{F}$ 是包含 I^* 的所有开集的最小 σ-代数.

设 $\xi \in B$. 用

$$K(i, \xi) := \lim_{\substack{j \to \xi \\ d}} K(i, j). \tag{1.4}$$

定义一个过份函数 $K(\cdot, \xi)$.

设 h 为过份函数. 如果从 $h = h_1 + h_2$ (h_1, h_2 为过份函数)必然导出 h_1, h_2 均是 h 的常数倍数，称 h 为极小的. 设边界点 $\xi \in B$，如果 $K(\cdot, \xi)$ 是极小的，调和的，而且满足

$$\sum_{i \in I} \gamma(i) K(i, \xi) = 1, \tag{1.5}$$

则称 ξ 为极小的边界点. 所有极小的边界点的集合记为 B_e.

我们将利用[5]的下列结果：

(A) 设函数 h 过份且 γ-可积；则对 h 链 (x_n,β)，几乎处处有：或者当 β 有限时 $x_\beta \in I$，或者当 β 无限时 x_n 在 I^* 的拓扑中收敛于某点 $x_\beta \in B_e$.

(B) 对于(A)中的 h，存在 $I \cup B_e$ 上的唯一测度 μ^h，使得

$$h(i) = \int_{I \cup B_e} K(i,\xi)\mu^h(\mathrm{d}\xi); \tag{1.6}$$

测度 μ^h 有如下的概率解释：设 h-链有初始分布 γ^h，$(\gamma^h(i) := \gamma(i)h(i))$；则终结状态 x_β 有分布 μ^h，即，

$$\mu^h(C) := P(x_\beta \in C), C \in \mathscr{F}. \tag{1.7}$$

测度 μ^h 集中在 B_e 上当且仅当 h 是调和的.

(C) 适当地选取基本空间 Ω，对 $\xi \in B_e$，我们可以在条件 $x_\beta = \xi$ 之下研究(B)中的 h-链. 条件链记为 $\{x_{n\xi}\}$. 对于 μ^h 几乎一切 ξ (记为 μ^h-ξ)，$\{x_{n\xi}\}$是 $K(\cdot,\xi)$-链(因而是马尔可夫链)，具有状态空间 $I_\xi = \{i: K(i,\xi) > 0\}$ 和初始分布 $\gamma^{K(\cdot,\xi)}$. 由于 $K(\cdot,\xi)$是调和的，$\sum_{j \in I_\xi} P(i,j)K(j,\xi)/K(i,\xi) = 1 (i \in I_\xi)$，此链是不中断的，即 $\beta(\omega) \equiv \infty$.

2. 一些引理

引理 1.1 设 $\xi \in B_e$，$\{x_n\}$是一个 $K(\cdot,\xi)$-链，具有任意的初始分布 α，$(\sum_i \alpha(i) = 1)$. 则 $P(x_\beta = \xi) = 1$.

证 概率 P 依赖于初始分布 α，宜记 P 为 P_α. 如果 $\alpha = \gamma^{K(\cdot,\xi)}$，由(C)和(1. 5)有

$$1 = P_\alpha(x_\beta = \xi) = \sum_{i \in I_\xi} \gamma(i)K(i,\xi)P_i(x_\beta = \xi), \tag{1.8}$$

其中 P_i 是初始分布集中于状态 i 的 $K(\cdot,\xi)$-链产生的概率测度. 由于 $\gamma(i)K(i,\xi) > 0$,. 从(1. 5)和(1. 8)得 $P_i(x_\beta = \xi) = 1$ $(i \in I_\xi)$. 从而对任何初始分布 α(它必定集中在 I_ξ 上)，有

$$P_\alpha(x_\beta = \xi) = \sum_{i \in I_\xi} \alpha(i) P_i(x_\beta = \xi) = \sum_{i \in I_\xi} \alpha(i) = 1. \quad \blacksquare$$

记

$$\mu_i^h(C) := P_i(x_\beta \in C) \quad (C \in \mathscr{F});$$

它是初始分布集中在 i 上的 h-链的终结状态的分布，从(1. 6)和(1. 7)看出，μ^h 起着很重要的作用. 但是，如何求 $\mu_i^h(C)$ 和 $\mu^h(C)$ 的值？当 C 是单点集 $j \in I^h$ 的特殊情况时，从[5]中(2. 21)得

$$\left.\begin{aligned} \mu_i^h(j) &= G(i,j)[h(j) - Ph \cdot (j)]/h(i), (i,j \in I^h), \\ \mu^h(j) &= \sum_{i \in I^h} \gamma(i) G(i,j)[h(j) - Ph \cdot (j)], (j \in I^h). \end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

至于对边界集 C，我们有

定理 1.1 设 $C \subset B_e, C \in \mathscr{F}$；则

$$\mu_i^h(C) = h_C(i)/h(i), (i \in I^h),$$

$$\mu^h(C) = \sum_{i \in I^h} \gamma(i) h_C(i),$$

其中 $h_c(i)$ 是对于 C，h 在 i 的 réduite*

证 取任意的元素 $s \overline{\in} I$，定义 $P(s,i) = \gamma(i)$，$P(i,s) = 0$，$(i \in I)$. 则 $P(i,j)$ 的定义域从 I 扩大到 $I \cup \{s\}$. 因 $\gamma(i) > 0$，故扩大的 P 有一个中心** s. 因此，我们可以利用[6]中公式(4. 20)：

$$h_C(i) = \int_C K(i,\xi) \mu^h(\mathrm{d}\xi). \tag{1.10}$$

由此我们得(见[5]中(2. 19))

$$\mu_i^h(C) = \int_C \frac{K(i,\xi)}{h(i)} \mu^h(\mathrm{d}\xi) = \frac{h_C(i)}{h(i)}, (i \in I^h). \tag{1.11}$$

从(1. 7)和(1. 11)得出

$$\mu^h(C) = \sum_{i \in I^h} \gamma^h(i) \mu_i^h(C) = \sum_{i \in I^h} \gamma(i) h_C(i). \qquad \blacksquare$$

我们有下面的简单结果，为完备计算我们也给出它们的证明.

引理 1.2 (i) 常值函数 1 是极小调和的，当且仅当，存在不恒等于 0 的有界调和函数且任何这样的函数是常数.

---

* 其定义见[6].

** 用[6]的术语.

(ii) 如 $\xi \in B_e$ 且 h 是有界 $K(\cdot,\xi)$-调和函数，则 h 恒等于某个常数.

证 (i) 下面的事实是有用的[5,6]：对任何极小调和函数 h，存在唯一的点 $\xi \in B_e$ 使得测度 μ^h 集中在该点上. 因此，如果 1 是极小调和的，μ^1 集中在某点 $\xi \in B_e$ 上，即，$P(x_\beta = \xi) = 1$，这里 x_β 是 1-链的终极状态，而概率 P 是由转移矩阵 P 和初始分布 γ 产生的概率测度. 由于 $\gamma(i) > 0$，故 $P_i(x_\beta = \xi) = 1$，$(i \in I)$. 但是任何有界调和函数 μ 可表示为 $\mu(i) = E_i f(x_\beta)$，其中 f 是定义在 B_e 上的边界函数，而 E_i 是关于测度 P_i 的期望[5]. 从而

$$\mu(i) = E_i f(x_\beta) = f(\xi)$$

是不依赖于 i 的常数.

反之，取一个非平凡的有界调和函数 u. 按假设 u 恒等于一个常数 $c > 0$. 这意味着 c 是调和的，因而 1 也是调和的. 如果调和函数 $v \leqslant 1$，按假设 v 是常数，故 v 是 1 的倍数. 这就得出 1 是极小调和的.

(ii) 由于 $\mu^{K(\cdot,\xi)}$ 集中在点 ξ 上，用类似于证明(i)的论证，我们得知任何有界 $K(\cdot,\xi)$-调和函数 h 是常数. ∎

13.2 过份函数的极限定理

1. F 极限的存在性

在过份函数的极限定理的研究中，F 收敛起着重要的作用. 设 $\xi \in B_e$，D 是 I 的子集. 按照 Doob[3]，如果对初始分布为 $\gamma^{K(\cdot,\xi)}$ 的 $K(\cdot,\xi)$-链 $\{x_n(\omega)\}$（因而按引理 1.1，对 I_ξ 的任意初始分布），对几乎一切 ω，存在正整数 $N \equiv N(\omega)$，使对一切 $n \geqslant N(\omega)$ 有 $x_n(\omega) \in D$，称 D 为 ξ 的 F 邻域.

我们称函数 $v(i)(i \in I)$ 在点 $\xi \in B_e$ 有 F 极限 b（可以是无穷），并记为 $F\lim\limits_{i \to \xi} v(i) = b$，如果对意的 $[-\infty,\infty]$ 中的 b 的邻域 G，存在 ξ 的 F 邻域 D，使 $v(i) \in G$ 对一切 $i \in D$.

下面的引理 2.1 在[3]已指出，但没有证明.

引理 2.1 F 极限 $F\lim_{i\to\xi}v(i)=b$ 存在，当且仅当对初始分布为 $\gamma^{K(\cdot,\xi)}$（因而对 I_ξ 上的任意初始分布）的 $K(\cdot,\xi)$-链 $\{x_n\}$，有 $\lim_{n\to\infty}v(x_n)=b$，(a. e.).

证 设 $F\lim_{i\to\xi}v(i)=b$；则对 b 的任意邻域 G，存在 ξ 的 F 邻域 D，使 $v(i)\in G$ 对一切 $i\in D$. 固定 D，依定义，对初始分布为 $\gamma^{K(\cdot,\xi)}$ 的 $K(\cdot,\xi)$-链 $\{x_n\}$，我们可以找到 $N=N(\omega)>0$ 使 $x_n\in D$ 对 $n\geqslant N$；因而 $v(x_n)\in G$，(a. e.).

反之，设 $\lim_{n\to\infty}v(x_n)=b$，(a. e.). 在一个零测集上适当地选取 b 的值之后，b 关于 $\{x_n\}$ 的不变 σ 代数是可测的[1，I § 17]. 但依引理 1.2(ii)和[1，第 113 页]，这个不变 σ 代数包含的仅是测度为 0 或 1 的集；从而 b 是常数(a. e.). 设

$$\Omega_0=(\omega:\lim_{n\to\infty}v(x_n(\omega))=b, b\text{- 常数}).$$

则 $P(\Omega_0)=1$. 对 b 的任意邻域 G，如 $\omega\in\Omega_0$，存在正整数 $N\equiv N(\omega)$，使对一切 $n\geqslant N$，有

$$v(x_n(\omega))\in G. \tag{2. 1}$$

取 $D=(x_n(\omega):\omega\in\Omega_0, n\geqslant N(\omega))$，即，$D$ 是满足括号中两个条件的状态 $x_n(\omega)$ 的集合. 依定义，D 是 ξ 的 F 邻域. 从(2. 1)得出 $v(i)\in G$ 对一切 $i\in D$. ∎

下面假定，$\lim_{n\to\beta}v(x_n)$ 总存在，且当 $\beta<\infty$ 时等于 $v(x_\beta)$. 测度 μ 在 B_e 上的约束记为 μ_B. 回忆"μ_B-ξ"指的是"对 μ_B-几乎一切".

定理 2.1 设(x_n,β)是初始分布为 γ 的 1-链. 如果 $\lim_{n\to\infty}v(x_n)$ 存在(a. e.)，则存在极限 $F\lim_{i\to\xi}v(i)=b(\xi)$，($\mu_B$-$\xi$).

证 依引理 2.1，只需证明：对 μ_B-ξ，存在极限 $\lim_{n\to\infty}v(y_n)$，其中 $\{y_n\}$ 是初始分布为 $\gamma^{K(\cdot,\xi)}$ 的 $K(\cdot,\xi)$-链，按照 13.1 中的(C)，适当选取基本空间 Ω，我们只需证明 $\lim_{n\to\infty}v(x_{n\xi})$ 存在(a. e.). 设 P^ξ 是由马尔可夫链 $\{x_{n\xi}\}$ 导出的概率；则依假设，

$$1=P(\lim_{n\to\beta}v(x_n)\text{ 存在})$$

$$= P(\beta < \infty) + P(\lim_{n\to\infty} v(x_n) \text{ 存在})$$

$$= \mu(I) + \int_{B_e} P^{\xi}(\lim_{n\to\infty} v(x_{n\xi}) \text{ 存在})\mu_B(\mathrm{d}\xi).$$

由于 $\mu(I)+\mu_B(B_e)=\mu(I\cup B_e)=1$，存在 $b(\xi)$使

$$P^{\xi}(\lim_{n\to\infty} v(x_{n\xi})=b(\xi))=1 \ (\mu_B\text{-}\xi).$$ ▌

2. F 极限的确切值

如何求 $F\lim_{i\to\xi} v(i)$的值？如果 v 是有限过份函数，这个问题能够解决.

引理 2.2* 假定关于马尔可夫链$\{x_n\}$，1 是对应于点 $\xi(\in B_e)$的极小调和函数. 如果 v 是该链的有限过份函数，则

$$F\lim_{i\to\xi} v(i) = \inf_{i\in I} v(i).$$

证 依引理 2.1，只需证明

$$\lim_{n\to\infty} v(x_n) = \inf_{i\in I} v(i), (a.\ e.\ ).$$

由于 v 是有限过份函数，左方极限存在且有限[5]. 为证等号，先设 v 有界. 考虑 v 的 Riesz 分解

$$v(i) = g(i) + h(i),$$

其中 g 是非负势，而 h 是有界调和函数. 依引理 1.2，$h(i)\equiv C$(常数). 类似于[4]的定理 12. 8 中的论证，不难证明$\lim_{n\to\infty} g(x_n)=0(a.\ e.\ )$. 因 $g(i)\geqslant 0$，我们有

$$\lim_{n\to\infty} v(x_n)=c=\inf_{i\in I} v(i), (a.\ e.\ ).$$

对一般的 v，令 $a(\omega) = \lim_{n\to\infty} v(x_n(\omega))$. 如同上面提到的，我们可以假设 $a(\omega)$ 是有限的. 定义函数

$$v_m(i) = \min(m, v(i)).$$

则 v_m 是有界且过份的. 故

$$\lim_{n\to\infty} v_m(x_n(\omega)) = \inf_{i\in I} v_m(i).$$

由于 $v_m \uparrow v$ 及 $a(\omega)$的有限性，存在正整数 $N\equiv N(\omega)$，使对一切 n

* “h-过份(调和)”和“对于 h-链过份(调和)”同义.

$\geqslant N$ 有

$$v(x_n(\omega)) \leqslant a(\omega) + 1, (a.\ e.\ ).$$

取任意的正整数 $M \equiv M(\omega) \geqslant a(\omega)+1$；则对一切 $m \geqslant M$ 有

$$v(x_n(\omega)) = v_m(x_n(\omega)), (n \geqslant N).$$

注意对 $m \geqslant M_1$（M_1 是某个正整数），我们有

$$\inf_{i \in I} v_m(i) = \inf_{i \in I} v(i).$$

于是

$$\lim_{n \to \infty} v(x_n(\omega)) = \lim_{n \to \infty} v_{M+M_1}(x_n(\omega)) = \inf_{i \in I} v(i), (a.e.).$$

∎

定理 2.2 设 u 是有限过份函数；则对 μ_B-ξ 有

(i) $$F \lim_{i \to \xi} \frac{u(i)}{h(i)} = \inf_{i \in H} \frac{u(i)}{h(i)}, \tag{2.2}$$

其中 $\xi \in B_e$，且 h 是对应于 ξ 的非平凡极小调和函数，$H = \{i : h(i) > 0\}$.

(ii) 如果 h 有界，则

$$F \lim_{i \to \xi} u(i) = \sup_{i \in H} h(i) \cdot \inf_{i \in H} \frac{u(i)}{h(i)}; \tag{2.3}$$

(iii) 设 v 也是有限过份函数，h 有界，且 $F \lim\limits_{i \to \xi} v(i) > 0$；则

$$F \lim_{i \to \xi} \frac{u(i)}{v(i)} = \inf_{i \in H}\left(\frac{u(i)}{h(i)}\right) \Big/ \inf_{i \in H}\left(\frac{u(i)}{h(i)}\right). \tag{2.4}$$

证 因 h 对于 P 是极小调和的，故 1 对于 P^h 是极小调和的. h 链的终结分布集中在对应于 h 的点 ξ 上；因此，作为 h-链的极小调和函数的常数 1，也对应于点 ξ. 而且，$\frac{u}{h}$ 是 h-过份的，在 H 中是有限的. 依引理 2.2，我们得(2.2).

在(2.2)中取 $u \equiv 1$，我们有

$$F \lim_{i \to \xi} h(i) = \sup_{i \in H} h(i) > 0. \tag{2.5}$$

如果 h 有界，此极限有限. 将此极限代入(2.2)得

$$F \lim_{i \to \xi} u(i) = F \lim_{i \to \xi} h(i) \cdot F \lim_{i \to \xi} \frac{u(i)}{h(i)} = \sup_{i \in H} h(i) \cdot \inf_{i \in H} \frac{u(i)}{h(i)}.$$

这就证明了(2.3). 应用(2.3)到 v 并用所得到的公式除(2.3)，

依假设 $F\lim_{i\to\xi} v(i)>0$，我们得(2.4). ∎

注 2.1 对于一个给定的边界点 $\xi\in B_e$，对应于 ξ 的 h 的一个可能选取是 $K(\cdot,\xi)$. 按照等式(见[5]中(2.19))

$$P_i(x_\beta=\xi)=K(i,\xi)\mu\{\xi\},\tag{2.6}$$

我们看出，如果 $\mu\{\xi\}>0$，$K(\cdot,\xi)$必定有界. 因为对应于 h 的任何极小调和函数必定是 $K(\cdot,\xi)$的倍数，故如 $K(\cdot,\xi)$有界，则 h 有界.

3. 原子核情形

有限过份函数的 F 收敛尚未被充分地研究. 何时 F 收敛化为通常的收敛?我们给出一个简单的但却充分的条件，该条件在实际中是有用的. 首先我们引进原子核的概念.

设$\{x_n\}$是不中断的马尔可夫链，设初始分布为 γ. 考虑该链的状态空间的 Blackwell 分解[1,§17]：

$$I=E_0\cup E_1\cup E_2\cup\cdots,\tag{2.7}$$

其中 E_i 是不相交的几乎闭集，E_0 是完全非原子的，$E_j(j>0)$是原子集. 如果 $\xi_j(\in B_e)$且 $\mu\{\xi_j\}>0$，称 ξ_j 为原子边界点. 在[2]中证明了，所有的原子几乎闭集和所有的原子边界点之间存在一一对应，设 E_j 对应 ξ_j.

给定 $E_j(j>0)$的无穷子集 ϵ_j，如果

$$P(\mathscr{L}(E_j))=P(\mathscr{L}(\epsilon_j)),\tag{2.8}$$

且对 ϵ_j 的任意无穷子集 A 有

$$P(\mathscr{L}(\epsilon_j-A))=0,\tag{2.9}$$

称 ϵ_j 为原子核. 这里 $\mathscr{L}(\epsilon)=\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}(x_n\in\epsilon)$.

引理 2.3 原子核 ϵ_j 的任意无界*序列$\{j_n\}$当 $n\to\infty$时 F 收敛于 ξ_j.

证 给定 ξ_j 的任意 F 邻域C. 对于 $K(\cdot,\xi_j)$-链$\{y_n\}$，存在一

---

* 序列$\{j_n\}$称为无界，如果对 I 的任意有限集 D，存在 $N>0$ 使 $j_n\notin D$ 对一切 $n\geqslant N$.

个 ω-集 Ω_0，$P(\Omega_0)=1$，使对任意 $\omega\in\Omega_0$，存在正整数 $N=N(\omega)$，而对一切 $n\geqslant N$ 有 $y_n(\omega)\in C$. 令

$$Y=(y_n(\omega):\omega\in\Omega_0,n\geqslant N(\omega))\subset C.$$

取 $N(\omega)$ 充分大，可设 $Y\subset E_j$；依(2. 8)，还可以设 $Y\subset\varepsilon_j$，由此得出几乎一切(除去有限多个) $j_n\in Y$. 因为不然的话，将存在 $\{j_n\}$ 的无穷子集 A，使得

$$\begin{aligned}P(\mathscr{L}(\varepsilon_j-A))&\geqslant P(\mathscr{L}(Y-A))\\&=p(\mathscr{L}(Y))=\mu(\xi_j)>0,\end{aligned}$$

这与(2. 9)矛盾，于是对一切 $n\geqslant M$ 有

$$j_n\in Y\subset C.$$

这里 M 是一个与 ω 无关的常数. ∎

定理 2.3 设 $\{x_n\}$ 是有初始分布 γ 的马尔可夫链，u 是此链的有限过份函数. 如果 ε_j 是原子核，$\{j_n\}$ 是 ε_j 的任意无界序列，则存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}u(j_n)$. 而且

$$\lim_{n\to\infty}u(j_n)=\sup_{i\in H}h(i)\inf_{i\in H}\frac{u(i)}{h(i)},\tag{2.10}$$

其中 h 是对应于 ξ_j 的极小调和函数，$H=\{i:h(i)>0\}$.

证 因 ξ_j 对应原子几乎闭集 E_j，$\mu\{\xi_j\}>0$. 依注 2.1，h 有界. 从(2. 3)得出(2. 10)右方的值等于 $F\lim\limits_{i\to\xi_j}u(i)$. 但依引理 2.3，

$$\lim_{n\to\infty}u(j_n)=F\lim_{i\to\xi_j}u(i).$$

这样便结束了(2. 10)的证明. ∎

4. 过份测度的极限定理

根据对偶，不难得到过份测度的相应结果. 假定对于转移矩阵 P 存在一个严格正的过份测度 $\alpha(i)>0$，$(i\in I)$ (如果 P 是不可约的即任意两个状态互通，这样的 α 存在). 令

$$q_{ji}=P(i,j)\alpha(i)/\alpha(j).\tag{2.11}$$

设 β 是 P 的有限过份测度. 定义

$$\beta^*(i)=\beta(i)/\alpha(i)\ (i\in I);$$

则 β^* 是 $Q=(q_{ji})$ 的有限过份函数. 设 ξ^* 是 Q-链的极小边界点，

F^*是它的 F 收敛. 从(2. 2)我们得

$$F^* \lim_{i\to\xi^*} \frac{\beta(i)}{\alpha(i)h^*(i)} = \inf_{i\in H^*} \frac{\beta(i)}{\alpha(i)h^*(i)},$$

其中 h^*是 Q-链的对应于 ξ^* 的极小调和函数,$H^* = (i; h^*(i) > 0)$.

13.3 应用于可列马尔可夫过程

1. 连续时间参数情形

设 $X = \{x(t,\omega), 0 \leqslant t < \tau(\omega)\}$是可列马尔可夫过程,其转移矩阵满足条件:

$$\lim_{t\to 0+} P_{ii}(t) = 1 \ (i \in I), \tag{3.1}$$

假定这个过程的样本函数是右连续的. 设 $Q = (q_{ij})$是它的密度矩阵,其中

$$q_{ij} = \lim_{t\to 0} \frac{P_{ij}(t) - \delta_{ij}}{t}.$$

下面我们总假定

$$0 < q_i \equiv - q_{ii} = \sum_{j\neq i} q_{ij} < \infty, (i \in I). \tag{3.2}$$

用 $\tau_n(\omega)$表示样本函数的第 n 次跳跃时刻,即

$$\tau_0(\omega) \equiv 0,$$

$$\tau_n(\omega) = \inf(t; t > \tau_{n-1}(\omega), x(t,\omega) \neq x(\tau_{n-1}(\omega), \omega)).$$

而且,假定过程的终止时刻由

$$\tau(\omega) = \lim_{n\to\infty} \tau_n(\omega) \tag{3.3}$$

给出,故 $X \equiv \{x(t,\omega), 0 \leqslant t < \tau(\omega)\}$是所谓的最小过程. 马尔可夫链

$$y_n(\omega) = x(\tau_n(\omega), \omega) \ (n = 0,1,2,\cdots), \tag{3.4}$$

称为过程 X 的嵌入链. 为了定义$\{y_n\}$的 Martin 边界,我们假定$\{y_n\}$的转移矩阵满足(1. 3). 下面使用的记号 $F \lim\limits_{i\to\xi}$ 是关于这个边界的.

非负函数 $u(i)(i\in I)$称为 X 的过份函数，或简称为 X-过份的，如果对任意 $t\geqslant 0$，

$$\sum_{j\in I}P_{ij}(t)u(j)\leqslant u(i),(i\in I). \tag{3.5}$$

[6]中证明：函数 u 是 X-过份的当且仅当对嵌入链是过份的．于是，13.2 的结果可以应用到有限的 X-过份函数．

2．极限定理

对给定的函数 $f(i)\geqslant 0$，设它满足条件

$$u(i):=E_i\int_0^\tau f(x(t,\omega))\mathrm{d}t<\infty\ (i\in I). \tag{3.6}$$

易证，上面确定的函数 u 是有限的，对 X 是过份的*．

设嵌入链$\{y_n\}$有初始分布 γ，ϵ 是该链对应于边界点 ξ 的原子核．显然，$\mu\{\xi\}>0$．依(2．6)，我们知道

$$\mu_i\{\xi\}\equiv P_i(y_\beta=\xi)$$

是$\{y_n\}$的对应于 ξ 的极小调和函数．取任何的无界序列$\{j_n\}\subset\epsilon$．从(2．10)得

$$\lim_{n\to\infty}E_{j_n}\int_{0'}^\tau f(x(t,\omega))\mathrm{d}t=\sup_{i\in H}\mu_i\{\xi\}\cdot\inf_{i\in H}\frac{E_i\int_0^\tau f(x(t,\omega))\mathrm{d}t}{\mu_i\{\xi\}}, \tag{3.7}$$

其中 $H=\{i:\mu_i\{\xi\}>0\}$．

特别地，在(3．7)中先取 $f(i)=\delta_{li}$，然后取 $f(i)=\delta_{mi}(l,m\in I)$，我们得到两个等式．如果**

$$M_m:=\inf_{i\in H}\frac{\int_0^\infty P_{im}(t)\mathrm{d}t}{\mu_i\{\xi\}}>0, \tag{3.8}$$

用得到的两个等式中的第二等式除第一个，我们得到下面的关于最小过程的转移概率的积分比的公式

---

* 见[4]中 10．15 节和 12．3 节．

** 注意，依(3．7)，$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^\infty P_{j_n m}(t)\mathrm{d}t=M_m\cdot\sup\limits_{i\in H}\mu_i\{\xi\}$．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^{\infty}P_{j_nl}(t)\mathrm{d}t}{\int_0^{\infty}P_{j_nm}(t)\mathrm{d}t}=\frac{M_l}{M_m}. \tag{3.9}$$

3. 对于双边生灭过程 F 收敛化为通常的收敛

一个可列马尔可夫过程称为双边生灭过程，如果它的密度矩阵 $Q=(q_{ij})$ 满足条件

$$q_{ij}=0 \quad 如\ |i-j|>1;$$

$$q_{i,j-1}=a_i>0, q_{i,j+1}=b_i>0, q_i:=-q_{ii}=a_i+b_i,$$

$i,j\in I=(\cdots,-1,0,1,\cdots)$，$I$ 是所有整数的集合. 引进下列特征数

$$x_i=-b_0\left(1+\frac{b_{-1}}{a_{-1}}+\cdots+\frac{b_{-1}b_{-2}\cdots b_{i+1}}{a_{-1}a_{-2}\cdots a_{i+1}}\right),如\ i<-1,$$

$$x_{-1}=-b_0,\quad x_0=0,\quad x_1=a_0,$$

$$x_i=a_0\left(1+\frac{a_1}{b_1}+\cdots+\frac{a_1a_2\cdots a_{i-1}}{b_1b_2\cdots b_{i-1}}\right),如\ i>1,$$

$$z_1=\lim_{i\to-\infty}x_i,\quad z_2=\lim_{i\to\infty}x_i.$$

[7]中已证明，如 c_{in}是嵌入链$\{y_n\}$从 i 经有限($\geqslant 0$)多步到达 n 的概率，则

$$c_{in}=\begin{cases}\dfrac{z_2-x_i}{z_2-x_n}, & 如\ n<i,\\ 1, & 如\ n=i,\\ \dfrac{x_i-z_1}{x_n-z_1}, & 如\ n>i.\end{cases} \tag{3.10}$$

$\left(\frac{\infty}{\infty}=1\right)$；对$\{y_n\}$，条件(1.3)对$\{y_n\}$不满足当且仅当 $z_1=-\infty$，$z_2=\infty$*. 于是我们只考虑至少有一个 z_i 为有限的情形.

情形 A $z_1=-\infty$，$z_2<\infty$. 此时只存在一个原子几乎闭集 I，$\epsilon=(n,n+1,\cdots)$是一个原子核[7]. 注意

---

* 如 $z_1=-\infty$，$z_2=\infty$，则$\{y_n\}$是常返的. 于是对$\{y_n\}$(或对最小过程 X)的每个过份函数 u 是常数. 注意，由于 $P_{ij}(t)>0$，$(t>0,i,j\in I)$，u 或者处处有限，或者恒等于 ∞.

$$K(i,j)=\frac{G(i,j)}{\sum_{v\in I}\gamma(v)G(v,j)}=\frac{c_{ij}G(i,j)}{\sum_{v\in I}\gamma(v)C_{vj}G(j,j)}$$

$$=\frac{c_{ij}}{\sum_{v\in I}\gamma(v)c_{vj}}. \tag{3.11}$$

如果 $j>i$,依(3. 10),$c_{ij}=1$. 因而

$$K(i,j)=1/[\sum_{v<j}\gamma(v)+\sum_{v\geq j}\gamma(v)c_{vj}]. \tag{3.12}$$

设∞是对应于 ε 的最小边界点. 由于 $\sum_{v\in I}\gamma(v)=1$, 我们有

$$K(i,\infty)=\lim_{j\to\infty}K(i,j)=1. \tag{3.13}$$

按照引理 1. 2(i)的证明,$\mu\{\infty\}\equiv P(y_\beta=\infty)=1$.

除了∞外,还有另一个边界点$-\infty$. 类似地,

$$K(i,-\infty)=(z_2-x_i)/\sum_{v\in I}\gamma(v)(z_2-z_v).$$

但因 $\mu\{-\infty\}=0$,这个边界点是平凡的.

设 u 是最小过程 X 的有限过份函数. 依(2. 10)并在那儿取 $h(i)=K(i,\infty)=1$,我们得

$$\lim_{i\to\infty}u(i)=\inf_{i\in I}u(i).$$

情形 B $z_1>-\infty,z_2<\infty$. 存在两个原子几乎闭集,有原子核 $\varepsilon_1=(\cdots,-n-1,-n)$和 $\varepsilon_2=(n,n+1,\cdots)$. 设$-\infty,\infty$是两个极小的边界点,分别对应于 ε_1 和 ε_2. 则

$$K(i,-\infty)=\frac{z_2-x_i}{\sum_{v\in I}\gamma(v)(z_2-x_v)},$$

$$K(i,\infty)=\frac{x_i-z_1}{\sum_{v\in I}\gamma(v)(x_v-z_1)}.$$

对于最小过程 X 的任何有限过份函数 u,我们有

$$\lim_{i\to-\infty}u(j)=(z_2-z_1)\cdot\inf_{i\in I}\frac{u(i)}{z_2-x_i},$$

$$\lim_{i\to\infty}u(j)=(z_2-z_1)\cdot\inf_{i\in I}\frac{u(i)}{x_i-z_1}$$

我们省略情形 $z_1>-\infty,z_2=\infty$,因为可按情形 A 同样地

考虑.

参考文献

[1] Chung K L. Markov chains with stationary transition probabilities. Berlin:Springer-verlag,1966.

[2] Chung K L. On the boundary for Markov chains. Acta Mathematica, 1963,110(1—2):9～77

[3] Doob J L. Discrete potential theory and boundaries. J. Math. and Mech. ,1959,8:433～458

[4] Дынкин Е Б. Марковские процессы. Москва: Госуд. издат. Физмат. литер. 1963.(英译本见第 4 篇的文献[6])

[5] Hunt G A. Markoff chains and Martin boundaries. Illinois J. Math. , 1960,4:313～340

[6] Watanabe T. On the theory of Martin boundaries induced by coutable Markov processes. Mem. Coll. Sci. Univ. kyoto,series A. Math. , 1960,33:39～108

[7] Yang Chao-chun(杨向群). The integral functionals of denumerable Markov processes and boundary properties of bilateral birth and death processes. Chinese Shuxue Jinzhan,1964,7(4):397～424

[8] Wang Tzu-kwen(王梓坤). Ergidic property and zero-one law for birth and death processes. Acta scientiarum Naturalium Univesitatis Nankaiensis (Math.),1964,5(5):89～94

第14篇　马尔可夫过程的若干联合分布

本篇对某些 Markov 过程,研究了它的停时(Stopping time 或 Optional time)$h(\omega)$、位置 $x(h)$、协停时(Co-optional time)$l(\omega)$、位置 $x(l)$四者的联合分布,并应用于 $d\geqslant 3$ 维 Brown 运动,求出了对称稳定过程首出球点与末离球点的联合分布密度.

设 $X=\{x(t,\omega),t\geqslant 0\}$为定义在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}_t,P)$上的时齐、右连续有左极限的强 Markov 过程,取值于可测 Polish 空间$(E,\mathscr{B})$,简记 $x(t,\omega)$为 $x(t)$或 x_t,推移算子为 θ_t. 称 $h(\omega)$为停时,如它取值于$[0,\infty]$,而且$\forall\ t\geqslant 0$,$(h(\omega)\leqslant t)\in\mathscr{F}_t$. 称 $l(\omega)$为协停时,如它为 $\mathscr{F}$ 可测、非负,而且$\forall\ t\geqslant 0$,有

$$\theta_t l(\omega)=\begin{cases}l(\omega)-t, & \text{如 } l(\omega)\geqslant t,\\ 0, & \text{如 } l(\omega)<t.\end{cases}$$

假设:

i) $\forall\ t\geqslant 0$, 在 $(t<h(\omega)<\infty)$ 上, 有 $\theta_t x(h(\omega))=x(h(\omega))$;

ii)在$(h(\omega)<\infty)$上,有 $h(\omega)\leqslant l(\omega)$.

由文献[1],在$(h(\omega)<\infty)$上,有

$$\theta_h l(\omega)=l(\omega)-h(\omega), \tag{1}$$

θ_t 及 θ_h 的精确定义与性质见文献[2]. 先证明它的一些新性质. $\mathscr{F}$ 的子 σ-代数 $\mathscr{A}$ 关于一切测度 $P_x(x\in E)$的完全化 σ-代数记为 $\mathscr{A}'$.

引理 1　设 $\xi(\omega)$、$\zeta(\omega)$皆有限、非负且为 $\sigma'\{x_t,t\geqslant 0\}$可测,则

(a) $\forall\ A\in\mathscr{B}$,有 $\theta_\xi(x(\zeta)\in A)=(x(\xi+\theta_\xi\zeta)\in A)$;

(b) $\theta_\xi x(\zeta)=x(\xi+\theta_\xi\zeta)$;

(c) 如在$(\zeta>\xi)$上有 $\theta_\xi\zeta=\zeta-\xi$,则$\forall\ s\geqslant 0, C\in\mathscr{B}$,在$(\zeta>\xi)$上有

$$\theta_\xi(\zeta>s, x(\zeta)\in C)=(\theta_\xi\zeta>s, x(\zeta)\in C), \tag{2}$$

$$\theta_\xi x(\zeta)=x(\zeta); \tag{3}$$

(d) 如在$(\zeta>t)$上有 $\theta_t\zeta=\zeta-t$,则在$(\zeta>t)$上有

$$\theta_t(\zeta>0, x(\zeta)\in C)=(\zeta>t, x(\zeta)\in C). \tag{4}$$

证

$$\theta_\xi(x(\zeta)\in A)=\theta_\xi\bigcup_t(x(\zeta)\in A,\zeta=t)$$

$$=\bigcup_t\theta_\xi(x(t)\in A,\zeta=t)=\bigcup_t(x(\xi+t)\in A,\theta_\xi\zeta=t)$$

$$=\bigcup_t(x(\xi+\theta_\xi\zeta)\in A,\theta_\xi\zeta=t)=(x(\xi+\theta_\xi\zeta)\in A).$$

由此得证(a). 由(a)可得(b). 又由(a)及假设

$$\theta_\xi(\zeta>s, x(\zeta)\in C)=(\theta_\xi\zeta>s, x(\xi+\theta_\xi\zeta)\in C)$$

$$=(\theta_\xi\zeta>s, x(\xi+\zeta-\xi)\in C)=(\theta_\xi\zeta>s, x(\zeta)\in C).$$

由此得证(2)式. 由(b)及假设 $\theta_\xi x(\zeta)=x(\xi+\theta_\xi\zeta)=x(\xi+\zeta-\xi)=x(\zeta)$,在(2)式中取 $s=0,\xi=t$,并利用 $\theta_t\zeta=\zeta-t$,即得(4)式. ∎

过程 X 的转移概率及算子半群分别记为

$$P(t,x,\mathrm{d}y),\{T_t,t\geqslant 0\},T_tf(x)=\int_E P(t,x,\mathrm{d}y)f(y).$$

令

$$P^h(s,x,\mathrm{d}y)=P_x(h>s,x(s)\in\mathrm{d}y),$$

$$T_s^hf(x)=\int_E P^h(s,x,\mathrm{d}y)f(y). \tag{5}$$

$$H(y,A)=P_y(x(h)\in A),$$

$$L(y,A)=P_y(l>0,x(l)\in A), \tag{6}$$

这里及以下的 $x(l)$ 皆理解为左极限 $x(l-)$.

注 (a)、(b)分别是熟知的关系式 $\theta_t(x(t)\in A)=(x(s+t)\in A)$及 $\theta_sx(t)=x(s+t)$的一般化,s,t 为常数. 再者,如(a)～(d)中的 $x(\cdot)$理解为左极限 $x(\cdot-)$,它们仍正确.

定理 1 设 X 为右连续有左极限的强 Markov 过程，h 与 l 分别为有限停时与协停时，满足(i)和(ii)．则$\forall\ s\geqslant 0, t\geqslant 0, A\in\mathscr{B}$, $C\in\mathscr{B}, x\in E$，有

$$P_x(h>s, x(h)\in A; l-h>t, x(l)\in C)$$

$$=\int_A P_y(l>t, x(l)\in C)P_x(h>s, x(h)\in \mathrm{d}y) \tag{7}$$

$$=\int_A (T_tL)(y,C)\cdot T_s^hH(x,\mathrm{d}y). \tag{8}$$

证 由(2)、(4)式及注有

$$(\theta_h l>t, x(l)\in C)=\theta_h(l>t, x(l)\in C), \tag{9}$$

$$(l>t, x(l)\in C)=\theta_t(l>0, x(l)\in C). \tag{10}$$

由(1)、(7)式之左方为

$$P_x(h>s, x(h)\in A; \theta_h l>t, x(l)\in C)$$

$$=\int_{(h>s, x(h)\in A)} P_x(\theta_h l>t, x(l)\in C|\mathscr{F}_h)P_x(\mathrm{d}\omega)$$

$$\overset{(9)}{=}\int_{(h>s, x(h)\in A)} P_x(\theta_h(l>t, x(l)\in C)|\mathscr{F}_h)P_x(\mathrm{d}\omega)$$

$$=\int_{(h>s, x(h)\in A)} P_{x(h)}(l>t, x(l)\in C)P_x(\mathrm{d}\omega)$$

$$=\int_A P_y(l>t, x(l)\in C)P_x(h>s, x(h)\in \mathrm{d}y) \tag{11}$$

$$\overset{(10)}{=}\int_A P_y(\theta_t(l>0, x(l)\in C))P_x(h>s, x(h)\in \mathrm{d}y). \tag{12}$$

但

$$P_y(\theta_t(l>0, x(l)\in C)) = E_yP_{x(t)}(l>0, x(l)\in C)$$

$$=\int_E P_z(l>0, x(l)\in C)P(t,y,\mathrm{d}z) = (T_tL)(y,C). \tag{13}$$

又由假设(i)，

$$P_x(h>s, x(h)\in A) = P_x(h>s, \theta_s x(h)\in A)$$

$$=P_x(h>s, \theta_s(x(h)\in A))$$

$$=\int_{(h>s)} P_x(\theta_s(x(h)\in A)|\mathscr{F}_s)P_x(\mathrm{d}\omega)$$

$$= \int_{(h>s)} P_{x(s)}(x(h) \in A) P_x(\mathrm{d}\omega)$$

$$= \int_E P_z(x(h) \in A) P_x(h > s, x(s) \in \mathrm{d}z)$$

$$= (T_s^h H)(x, A). \tag{14}$$

由(13)、(14)及(12)式，即得证(8)式. 而(7)式即(11)式. ∎

由(13)式可见，$P_y(l>t, x(l)\in C)$涉及$P(t,y,\mathrm{d}z)$，而(14)式则涉及复杂的禁止概率$P_y(h>s, x(s)\in \mathrm{d}z)$. 因此求$(h, x(h))$的联合分布比求$(l, x(l))$的一般更难些，这也许非直观所能预料. 由(7)式得

$$P_x(h > s, l - h > t)$$

$$= \int_E P_y(l > t) P_x(h > s, x(h) \in \mathrm{d}y). \tag{15}$$

特别，如$P_x(h>0)=1$，则有下式：

$$P_x(l - h > t) = \int_E P_y(l > t) P_x(x(h) \in \mathrm{d}y), \tag{16}$$

$$P_x(x(h) \in A, l > h, x(l) \in C)$$

$$= \int_A P_y(l > 0, x(l) \in C) P_x(x(h) \in \mathrm{d}y). \tag{17}$$

今考虑一些特殊的停时与协停时，设$B\in\mathscr{B}$. 过程X关于B的首中时h_B、首出时e_B、末离时l_B分别定义为

$$h_B(\omega)=\inf(t>0, x(t,\omega)\in B), \quad e_B(\omega)=h_{E\setminus B}(\omega),$$

$$l_B(\omega)=\sup(t>0, x(t,\omega)\in B),$$

并约定对空集$\varnothing$，$\inf(\varnothing)=\infty$，$\sup(\varnothing)=0$. h_B、e_B皆为停时而l_B为协停时[3]. 当$l_B>0$时，(h_B, l_B)与(e_B, l_B)皆满足假设(i)和(ii).

讨论 取值于$E=R^d$(d维欧氏空间)中的对称稳定过程$S=\{S(t,\omega), t\geqslant 0\}$，有参数$\alpha$，$0<\alpha<2$，亦即$S$为独立增量过程而且

$$E\exp[i(S_{s+t}-S_s)\xi']=\exp(-t|\xi|^\alpha),$$

S的不变测度见文献[4]. 今取其右连续有左极限的修正，S是强Markov过程. 以下设$\alpha<d$，从而S是暂留的，球B_r的首出时为$e_r=\inf(t>0, |x_t|>r)$，$e_r<\infty$；末离时为$l_r=\sup(t>0, |x(t-)|<r)$. 以下$S(l_r)$理解为左极限$S(l_r-)$. 它与$S(e_r)$的分布集中于B_r

与 $E\setminus\mathring{B}_r$，$\mathring{B}_r=(x:|x|<r)$.

定理 2 对 $A\subset E\setminus\mathring{B}_r$，$C\subset B_r$，$x\in R^d$，$d>\alpha$，有

$$P_x(S(e_r)\in A,l_r>e_r,S(l_r)\in C)$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\int_C\int_A\frac{k^2|r^2-|x|^2|^{\alpha/2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{|x-y|^d|r^2-|y|^2|^{\alpha/2}|y-z|^{d-\alpha}|r^2-|z|^2|^{\alpha/2}}, & \text{如 } |x|<r;\quad(18)\\ \displaystyle I_A(x)\int_C\frac{k\mathrm{d}z}{|r^2-|z|^2|^{\alpha/2}|x-z|^{d-\alpha}}, & \text{如 } |x|>r,\quad(19)\end{cases}$$

其中 $k=\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\left(\sin\frac{\pi\alpha}{2}\right)/\pi^{\frac{d}{2}+1}$，$I_A(x)=1,x\in A;=0,x\overline{\in}A$.

证 如 $|x|<r$，由文献[5]，$P_x(S(e_r)\in \mathrm{d}y)$ 关于 d 维 Lebesgue 测度 L_d 有密度为

$$\varepsilon_r(x,y)=\frac{k|r^2-|x|^2|^{\alpha/2}}{|x-y|^d\cdot|r^2-|y|^2|^{\alpha/2}},\quad |y|\geqslant r.$$

由文献[6]，如 $|y|>r$，$P_y(l_r>0,S(l_r)\in\mathrm{d}z)$，关于 L_d 有密度为

$$l_r(y,z)=\frac{k}{|y-z|^{d-\alpha}\cdot|r^2-|z|^2|^{\alpha/2}},\quad |z|\leqslant r.$$

由 S 的右连续性，$P_x(e_r>0)=1$，$|x|<r$. 故由(17)式即得(18)式. 次如 $|x|>r$，则 $P_x(S(e_r)\in A)=I_A(x)$ 集中于单点 x，故得证(19)式. ∎

对 $d\geqslant3$ 维 Brown 运动，球的首中(出)时、首中(出)点、末离时、末离点的研究已有相当长的历史. 1962 年，Ciesielski 等求得了自 O 出发，球的首出时的分布密度[7]. 1980 年，Wendel 研究了自任一点出发，球面首中时与首中点的联合分布的 Laplace 变换[8]，其后为 Betz 及 Gzyl 所继续[9]. 1980 年，王梓坤求得球的末离时与末离点的联合分布的积分表示，特别地，求得自 O 出发，末离时的分布密度[10]；此密度也为 Getoor 用其他方法得到[11]. 1984 年，吴荣求出了自任一点出发末离时的 Laplace 变换，并给出了自 O 出发，末离时与末离点的联合分布密度[12]. 1995 年，作者研究了首出时、首出点与末离时、末离点四者的联合分布[13]，定理 1 是此结果的一般化. 下面给出此联合分布密度的表达式.

设 $W=\{W(t,\omega),t\geqslant0\}$ 为 $d\geqslant3$ 维标准 Brown 运动，单位球

为 $B=(x:|x|\leqslant 1)\subset R^d$. W 关于 B 的首出时与末离时分别记为 e_B 与 l_B. 由文献[10], $\forall\ x$,

$$f_2(x,t,C):=P_x(l_B>t,W(l_B)\in C)$$
$$=\frac{1}{(2\pi t)^{d/2}|\partial B|}\int_{R^d}\exp\left(-\frac{|x-y|^2}{2t}\right)\int_C\frac{L_{d-1}(\mathrm{d}z)}{|y-z|^{d-2}}\mathrm{d}y, \tag{20}$$

其中 $C\subset\partial B$ 而 $|\partial B|$ 为球面 ∂B 的面积. 1985 年 Hsu Pei[14] 求得自点 $x\in B$ 出发, $(e_B,W(e_B))$ 关于 $\mathrm{d}sL_{d-1}(\mathrm{d}y)$ 有联合分布密度为

$$f_1(s,x,y):=\frac{-\|x\|^{-q}}{q|\partial B|}\sum_{n\geqslant 0,m\geqslant 0}(q+m)\mu_{nm}e^{-\mu_{nm}^2 s/2}\cdot$$
$$\cdot\frac{J_{m+q}(\mu_{nm}\|x\|)}{J'_{m+q}(\mu_{nm})}C_m^q(\cos\theta), \tag{21}$$

其中 $q=\frac{d}{2}-1$, $\|x\|^2=\sum_{i=1}^{d}x_i^2$, $J_v(z)$ 表 v 阶 Bessel 函数, $J'_v(z)$ 表示 $J_v(z)$ 的导数, $\{\mu_{nm},n\geqslant 0\}$ 是 J_{m+q} 的非负零点, 按升序排列, $C_m^v(t)$ 表 Gegenbaur 多项式, 由下式定义:

$$(1-2\alpha t+\alpha^2)^{-v}=\sum_{n=0}^{\infty}C_n^v(t)\alpha^n,$$

而 θ 为 xoy 角, $x\neq 0$ 时.

如 $x=0$, 则当别论. 关于 P_0, 末离时 e_B 与末离点 $W(e_B)$ 独立:

$$P_0(e_B>s,W(e_B)\in A)=P_0(e_B>s)\cdot P_0(W(e_B)\in A). \tag{22}$$

已知[10] $W(e_B)$ 在球面 ∂B 上有均匀分布, 即

$$P_0(W(e_B)\in A)=U(A)\quad(A\subset\partial B), \tag{23}$$

又由文献[7],

$$P_0(e_B>s)=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_{dn}\exp\left(-\frac{\mu_{n0}^2\cdot s}{2}\right), \tag{24}$$
$$\xi_{d\mu}=\mu_{n0}^{q-1}/2^{q-1}\Gamma(q+1)J_{q+1}(\mu_{n0}).$$

综合上述, 并由定理 1, (7) 式即得下面的定理 3.

定理 3 对 $d\geqslant 3$ 维标准 Brown 运动 W, 单位球 B 的首出时

e_B、首出点 $W(e_B)$、末离时 l_B、末离点 $W(l_B)$有联合分布为：$\forall\ s,t \geqslant 0, A \subset \partial B, C \subset \partial B, x \in B$，有

$$P_x(e_B > s, W(e_B) \in A, l_B - e_B > t, W(l_B) \in C)$$
$$= \begin{cases} \int_0^s \int_A f_1(u,x,y) f_2(y,t,C) L_{d-1}(\mathrm{d}y)\mathrm{d}u & (\text{如 } x \neq 0), \\ \sum_{n=1}^{\infty} \xi_{dn} \exp\left(-\frac{\mu_{n0}^2 s}{2}\right) \cdot \int_A f_2(y,t,C) U(\mathrm{d}y) & (\text{如 } x = 0). \end{cases}$$

参考文献

[1] Sharpe M. General Theory of Markov Processes. New York: Academic Press Inc, 1988. 139

[2] Dynkin E B. Markov Processes I, II. Chap. 3. Berlin: Springer-Verlag, 1965

[3] Chung K L. Lectures from Markov Processes to Brownian Motion. Berlin: Springer-Verlag, 1982

[4] 吴荣. 对称稳定过程的不变测度. 数学年刊, 1986, 7A(2): 123～129

[5] Blumenthal R M, Getoor R K, Ray D B. On the distribution of first hits for symmetric stable process. Trans Amer Math Soc, 1961, 99: 540～554

[6] 王梓坤. 对称稳定过程与 Brown 运动的随机波. 中国科学, A 辑, 1982, (9): 801～806

[7] Ciesielski Z, Taylor S J. First passage times and sojourn times for Brownian motion in space and the exact Hausdorff measure of the sample path. Trans Amer Math Soc, 1962, 103: 434～450

[8] Wendel J G. Hitting spheres with Brownian motion. Ann Probability, 1980, 8(1): 164～169

[9] Betz C, Gzyl H. Hitting spheres from the exterior. Ann Probability, 1994, 22(1): 177～179

[10] 王梓坤. Brown 运动的末遇分布与极大游程. 中国科学, A 辑, 1980, (10): 933～940

[11] Getoor R K. The Brownian escape process. Ann Probability,1979,7 (5):864～867

[12] 吴荣. d 维 Brown 运动末离时的分布. 科学通报,1984,29(11):647～650

[13] 王梓坤. Brown 运动首中与末离的联合分布. 科学通报. 1994,39 (13):1168～1173

[14] Hsu P. Brownian exit distribution of a ball. Seminar on Stochastic Processes. Boston:Birkhauser,1986,108～116

第15篇　随机激发过程对地极移动的作用

15.1　地极移动的随机微分方程模型

长期的观察证实，地球自转轴的位置相对于地球本体并非固定不变，极点（北极或南极）在地球表面作随机飘移，构成所谓“地极移动”．大致地可将它分解为三种分量：长期极移、周年分量与钱德勒摆动．1891年钱德勒发现极移有一个1.2年的周期．地极移动（特别是钱德勒摆动）与大地震的关系引起了许多研究，但目前还无定论．我国在这些方面也做了不少工作（参看文献[1]）．正因为如此，就更增加了研究地极移动的必要性．在文献[3,4]中提出了钱德勒摆动所满足的随机微分方程，并研究了方程中系数 λ 与 ω 的统计估值问题．本篇的目的是求出这组方程的解，并以此解作为极移的数学模型．然后研究此模型的一些性质，并在此基础上提出了最佳预测公式．

以下所谓地极移动指的都是钱德勒摆动．

以 (ξ_t,η_t) 表示时刻 t 上地极的坐标，并简写为 (ξ,η)．地极移动的方程为

$$\begin{aligned} d\xi &= -\lambda\xi dt-\omega\eta dt+bd\varphi, \\ d\eta &= \omega\xi dt-\lambda\eta dt+bd\psi. \end{aligned} \qquad (1.1)$$

其中 φ、ψ 是时间 t 的随机函数，称为激发函数，$b>0$ 为常数，它表示激发的强度，ω 是钱德勒摆动的角速度而 λ 为阻尼系数. 我们假定 φ_t、ψ_t 是二相互独立的布朗运动(即维纳(Wiener)随机过程)，满足条件：

$$E\mathrm{d}\varphi=E\mathrm{d}\psi=0; \quad E(\mathrm{d}\varphi)^2=E(\mathrm{d}\psi)^2=\mathrm{d}t \tag{1.2}$$

(E 表示数学期望). 因而 $\mathrm{d}\varphi(:=\varphi_{t+\mathrm{d}t}-\varphi_t)$有数学期望为 0、方差为 $\mathrm{d}t$ 的正态分布. $\mathrm{d}\psi$ 也是如此. 工程或物理上常把方程(1.1)直观地理解为

$$\begin{aligned}\dot{\xi}&=-\lambda\xi-\omega\eta+b\dot{\varphi},\\ \dot{\eta}&=\omega\xi-\lambda\eta+b\dot{\psi}.\end{aligned}$$

其中"·"表示对 t 的随机微商，而 $\dot{\varphi}$ 与 $\dot{\psi}$ 则理解为独立的正态白噪音.

改写方程组(1.1)为矩阵形式

$$\begin{pmatrix}\mathrm{d}\xi\\ \mathrm{d}\eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\lambda & -\omega\\ \omega & -\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}\mathrm{d}t+\begin{pmatrix}b & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}\varphi\\ \mathrm{d}\psi\end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

或简写为

$$\mathrm{d}X=AX\mathrm{d}t+B\mathrm{d}W. \tag{1.4}$$

其中 $X=X_t=\begin{pmatrix}\xi_t\\ \eta_t\end{pmatrix}$，$W=W_t=\begin{pmatrix}\varphi_t\\ \psi_t\end{pmatrix}$，而 A、B 分别为(1.3)中二矩阵. 这是二元常系数线性随机微分方程组(在 Ito 意义下). 为解此方程，需先给出起始条件：

$$X_a=c. \tag{1.5}$$

这里 a 是开始时间，c 为已给的二维随机向量. 我们假定 c 与 $W_t-W_s(a\leqslant s\leqslant t)$独立. 容易证明：(1.4)、(1.5)的唯一解为

$$X_t=\mathrm{e}^{A(t-a)}\left[c+\int_a^t\mathrm{e}^{-A(s-a)}B\mathrm{d}W_s\right]. \tag{1.6}$$

事实上，微分(1.6)得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}X_t&=A\mathrm{e}^{A(t-a)}\left[c+\int_a^t\mathrm{e}^{-A(s-a)}B\mathrm{d}W_s\right]\mathrm{d}t\\ &\quad+\mathrm{e}^{A(t-a)}\mathrm{e}^{-A(t-a)}B\mathrm{d}W_t\\ &=AX_t\mathrm{d}t+B\mathrm{d}W_t.\end{aligned}$$

这就是(1.4)，故(1.6)满足(1.4)；又(1.6)满足(1.5)是明显的.

注意(1.6)中的 A 是一矩阵. 为了讨论解的性质，需要求出 e^{At}，这可用矩阵论中的一般方法. 但由于这里的 A 非常简单，故不如用初等方法把它直接计算出来，以便于阅读. 由定义

$$e^{At} = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!}, \tag{1.7}$$

其中 $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 为恒等矩阵. 因为

$$At=\begin{pmatrix} -\lambda t & -\omega t \\ \omega t & -\lambda t \end{pmatrix} = -\lambda t I + \omega t \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

令 $D=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，得

$$e^{At}=e^{-\lambda t I}e^{\omega t D}=e^{-\lambda t}e^{\omega t D}=e^{-\lambda t}\left(I+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\omega t D)^n}{n!}\right). \tag{1.8}$$

但容易看出：

$$D^{4n}=I, \qquad D^{4n+1}=D,$$
$$D^{4n+2}=-I, D^{4n+3}=-D, (n=0,1,2,\cdots).$$

代入(1.8)，即得

$$\begin{aligned}
e^{At}&=e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(\omega t)^{4n}}{(4n)!}I+\frac{(\omega t)^{4n+1}}{(4n+1)!}D-\frac{(\omega t)^{4n+2}}{(4n+2)!}I-\frac{(\omega t)^{4n+3}}{(4n+3)!}D\right] \\
&=e^{-\lambda t}\begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(\omega t)^{2n}}{(2n)!} & \displaystyle -\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(\omega t)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(\omega t)^{2n+1}}{(2n+1)!} & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(\omega t)^{2n}}{(2n)!} \end{pmatrix} \\
&=e^{-\lambda t}\begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

这就是所要求的结果. 由(1.9)得下列各式：

$$e^{A't}=(e^{At})'=e^{-\lambda t}\begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}, \tag{1.10}$$

$$e^{(A+A')t}=e^{-2\lambda t I}=e^{-2\lambda t}I, \tag{1.11}$$

$$e^{-At}=e^{\lambda t}\begin{pmatrix}\cos\omega t & \sin\omega t\\ -\sin\omega t & \cos\omega t\end{pmatrix}. \tag{1.12}$$

其中 B' 表示矩阵 B 的转置矩阵. 以(1.9)及(1.12)代入(1.6)展开,并利用三角函数的和角公式,最后得(1.4)、(1.5)的解为

$$\begin{aligned}\xi_t=&e^{-\lambda(t-a)}[c_1\cos\omega(t-a)-c_2\sin\omega(t-a)]\\ &+b\int_a^t e^{-\lambda(t-s)}[\cos\omega(t-s)\mathrm{d}\varphi_s-\sin\omega(t-s)\mathrm{d}\psi_s],\\ \eta_t=&e^{-\lambda(t-a)}[c_1\sin\omega(t-a)+c_2\cos\omega(t-a)]\\ &+b\int_a^t e^{-\lambda(t-s)}[\sin\omega(t-s)\mathrm{d}\varphi_s+\cos\omega(t-s)\mathrm{d}\psi_s].\end{aligned} \tag{1.13}$$

其中 c_1、c_2 是开始向量的两个分量,$c=\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}$.

15.2 地极移动模型的概率性质

我们既然求出了地极坐标(ξ_t,η_t)的表达式(1.6)或(1.13),就可通过此式来讨论地极移动模型的一些性质.

1) 由(1.6)或(1.13)可见,此解由两部分构成,第一部分即 $e^{A(t-a)}\cdot c$ 系由开始向量 c 所引起,它随 $t\to\infty$ 而指数型地趋于 0,即 c 的影响逐渐消失;第二部分即 $e^{A(t-a)}\int_a^t e^{-A(s-a)}B\mathrm{d}W_s$,它是由时间$[a,t]$中的布朗运动 W_t 所激励而产生的. 由假定 c 与 $W_u-W_v(a\leqslant v<u)$独立,故这两部分也是独立的.

2) 由于(1.1)是常系数线性方程组,它的解只依赖于 $t=a$ 时的位置 c,而不依赖于时刻 a 以前地极的位置. 因而地极移动模型是无后效的. 或者说,无记忆的. 即已知地极现在的位置 c 时,它将来的位置与过去的位置是独立的. 从数学上说,$X_t=\begin{pmatrix}\xi_t\\ \eta_t\end{pmatrix}$构成二维齐次马尔可夫随机过程,所谓齐次马尔可夫过程的定义是:对

任意 $n+1$ 个时刻 $0\leqslant s_1<s_2<\cdots<s_n<s_n+t$，任意 n 个二维向量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，在已知 $X_{s_i}=x_i(i=1,\cdots,n)$ 的条件下，X_{s_n+t} 的条件概率分布，重合于在 $X_0=x_n$ 的条件下，X_t 的条件概率分布.

3）如果取开始向量 c 有二维正态分布，或取 c 为非随机的二维常值向量(因而可视 c 为有退化的二维正态分布). 则解的第一部分是正态分布的. 由于 $W_u-W_v(a\leqslant v<u)$ 有正态分布，作为它们的线性组合的极限，第二部分也有正态分布. 由于这两部分独立，故此时解 X_t 也有正态分布，这意味着地极移动模型是二维正态过程. 此过程的分布显然依赖于 c 的分布. 下面指出应如何合理地选取 c 的分布.

4）试求出 X_t 的转移概率分布. 设 $X_0=x$，$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ 为任意二维常值向量. 在此条件下，由(1.6)，X_t 可表示为

$$X_t=e^{At}\left(x+\int_0^t e^{-As}B\mathrm{d}W_s\right) \tag{2.1}$$

而(2.1)中的 X_t 的分布即所要求的转移概率分布. 由 3)中所述，此 X_t 有二维正态分布，故为求出此分布，只要求出数学期望 EX_t 及方差矩阵 DX_t. 由(2.1)

$$EX_t=e^{At}x+e^{At}\cdot E\int_0^t e^{-As}B\mathrm{d}W_s \tag{2.2}$$

由 Ito 积分的性质，后一项为 0，故在 $X_0=x$ 的条件下，

$$EX_t=e^{At}x \tag{2.3}$$

利用(1.9)，上式的分量表示为

$$E\xi_t=e^{-\lambda t}(x_1\cos\omega t-x_2\sin\omega t),$$

$$E\eta_t=e^{-\lambda t}(x_1\sin\omega t+x_2\cos\omega t). \tag{2.4}$$

其次，由(2.1)、(2.3)及 Ito 积分的性质(见[4，第 410 页])得

$$\begin{aligned}DX_t&=E(X_t-EX_t)(X_t-EX_t)'\\&=E\left[\left(\int_0^t e^{A(t-s)}B\mathrm{d}W_s\right)\left(\int_0^t e^{A(t-s)}B\mathrm{d}W_s\right)'\right]\\&=E\int_0^t e^{(A+A')(t-s)}BB'\mathrm{d}s\text{(由积分性质)}\end{aligned}$$

$$= b^2\int_0^t e^{(A+A')(t-s)}ds = b^2\int_0^t e^{-2\lambda(t-s)I}ds \quad （由(1.11)）$$

$$= b^2\int_0^t e^{-2\lambda(t-s)}ds \cdot I = b^2\,\frac{1-e^{-2\lambda t}}{2\lambda}\cdot I, \qquad (2.5)$$

其中 $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. 故自 (x_1,x_2) 出发，经时间 t 后，地极转移到点 (y_1,y_2) 附近的转移概率密度为

$$p(x_1,x_2;t,y_1,y_2)=\frac{\lambda}{\pi b^2(1-e^{-2\lambda t})}\exp\frac{-\lambda}{b^2(1-e^{-2\lambda t})}$$
$$\cdot\{[y_1-e^{-\lambda t}(x_1\cos\omega t-x_2\sin\omega t)]^2$$
$$+[y_2-e^{-\lambda t}(x_1\sin\omega t+x_2\cos\omega t)]^2\}. \qquad (2.6)$$

从 X_t 的两个分量来看

$$D\xi_t=D\eta_t=b^2\,\frac{1-e^{-2\lambda t}}{2\lambda}.$$

而 ξ_t 与 η_t 的相关系数则等于 0，故在 $\xi_0=x_1,\eta_0=x_2$ 的条件下，二分量 ξ_t、η_t 在同一时刻 t 上是独立的.

5）在(2.6)中令 $t\to\infty$，得

$$\lim_{t\to\infty}p(x_1,x_2;t,y_1,y_2)=\frac{\lambda}{\pi b^2}\exp\frac{-\lambda}{b^2}(y_1^2+y_2^2). \qquad (2.7)$$

右方与起点 (x_1,x_2) 无关，这说明极移模型具有遍历性：当 $t\to\infty$ 时，它来到 (y_1,y_2) 附近的概率，与开始时从那一点出发是无关的. (2.7)中的极限分布是数学期望为 0、方差矩阵为 $\frac{b^2}{2\lambda}I$ 的二维正态分布，记为 $N\left(0,\frac{b^2}{2\lambda}I\right)$，并称它为平稳分布.

6）由于地极移动已进行了漫长的时间，故可认为已到达此平稳分布状态. 因此，为研究今后的地极移动，可合理地取开始分布（即上述开始向量 c 的分布）为 $N\left(0,\frac{b^2}{2\lambda}I\right)$.

今证明，如设 $X_0=c$ 的分布为 $N\left(0,\frac{b^2}{2\lambda}I\right)$，而且 c 与 W_u-W_v $(0\leqslant v<u)$ 独立，则极移模型是平稳过程. 为此，只要证明 X_t 的一、二级矩不随 t 而变. 事实上，由(1.6)得

$$EX_t=e^{At}\cdot Ec=0. \qquad (2.8)$$

其次，由(1.6)得

$$EX_tX_t' = E\left[\left(e^{At}c+\int_0^t e^{A(t-s)}BdW_s\right)\left(e^{At}c+\int_0^t e^{A(t-s)}BdW_s\right)'\right]$$
$$= E_1+E_2+E_3+E_4, \tag{2.9}$$

其中

$$E_1 = E[(e^{At}c)(e^{At}c)'] = e^{At}\cdot Ecc'\cdot e^{A't}$$
$$= e^{At}\cdot\frac{b^2}{2\lambda}I\cdot e^{A't} = \frac{b^2}{2\lambda}\cdot e^{-2\lambda t}I \quad (\text{用到}(1.11));$$
$$E_2 = E\left[(e^{At}c)\left(\int_0^t e^{A(t-s)}BdW_s\right)'\right],$$

但由假设，c 与 $W_u - W_v(0\leqslant v<u)$独立，故方括号中二因子也独立．又因 $Ee^{At}c=e^{At}Ec=0$，故

$$E_2 = e^{At}Ec\cdot E\left(\int_0^t e^{A(t-s)}BdW_s\right)' = 0.$$

同理

$$E_3 = E\left(\int_0^t e^{A(t-s)}BdW_s\right)(e^{At}c)' = 0.$$
$$E_4 = E\left(\int_0^t e^{A(t-s)}BdW_s\right)\left(\int_0^t e^{A(t-s)}BdW_s\right)'$$
$$= \int_0^t e^{A(t-s)}\cdot b^2I\cdot e^{A'(t-s)}ds \quad (\text{由积分性质})$$
$$= b^2Ie^{(A+A')t}\int_0^t e^{-(A+A')s}ds$$
$$= b^2\cdot e^{-2\lambda t}\cdot\int_0^t e^{2\lambda s}ds\cdot I \quad (\text{由}(1.11))$$
$$= \frac{b^2}{2\lambda}(1-e^{-2\lambda t})\cdot I. \tag{2.10}$$

以 E_1、E_2、E_3、E_4 的值代入(2.9)得

$$EX_tX_t' = \frac{b^2}{2\lambda}I. \tag{2.11}$$

下面计算相关函数．对 $\tau>0$，由(1.6)得

$$X_{t+\tau} = e^{A\tau}\left(X_t+\int_t^{t+\tau}e^{-A(s-t)}dW_s\right),$$

故

$$EX_tX'_{t+\tau} = EX_tX'_te^{A'\tau}+EX_t\left(e^{A\tau}\int_t^{t+\tau}e^{-A(s-t)}dW_s\right)',$$

但 X_t 与 $\int_t^{t+\tau} e^{-A(s-t)} dW_s$ 独立，而且 $E\int_t^{t+\tau} e^{-A(s-t)} dW_s = 0$，故由此及 (2.11)、(1.10) 得

$$EX_tX'_{t+\tau} = EX_tX_t'e^{A'\tau} = \frac{b^2}{2\lambda}e^{-\lambda\tau}\begin{pmatrix} \cos\omega\tau & \sin\omega\tau \\ -\sin\omega\tau & \cos\omega\tau \end{pmatrix},$$

$$(\tau>0).$$

两边取转置矩阵，得

$$EX_{t+\tau}X'_t = \frac{b^2}{2\lambda}e^{-\lambda\tau}\begin{pmatrix} \cos\omega\tau & -\sin\omega\tau \\ \sin\omega\tau & \cos\omega\tau \end{pmatrix} = EX_tX'_{t-\tau}, (\tau>0).$$

综合此二式，即知不论 τ 的正负，恒有

$$EX_tX'_{t+\tau} = \frac{b^2}{2\lambda}e^{-\lambda|\tau|}\begin{pmatrix} \cos\omega\tau & \sin\omega\tau \\ -\sin\omega\tau & \cos\omega\tau \end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

右方与 t 无关，故 $\{X_t, t\geqslant 0\}$ 是平稳过程；由于它是正态的，故它的有穷维分布也是平稳的.

7) 强相关性与钱德勒周期. 由(2.12)可见坐标分量 ξ_t(或 η_t)的自相关函数 $R(\tau)$：

$$R(\tau) \equiv E\xi_t\xi_{t+\tau} = \frac{b^2}{2\lambda}e^{-\lambda|\tau|} \cdot \cos\omega\tau = E\eta_t\eta_{t+\tau}. \tag{2.13}$$

注意 $E\xi_t = E\eta_t = 0$，其图如左. 当 $\tau = \frac{2k\pi}{\omega}$ $(k=0,1,2,\cdots)$时，$R(\tau)$达到局部极大. 这表示有一"相关"周期为$\frac{2\pi}{\omega}$，每过一周期，强正相关一次. 又当 $\tau = \frac{(2k+1)\pi}{\omega}$ $(k=0,1,2,\cdots)$时，$R(\tau)$达到局部极小，其周期也是$\frac{2\pi}{\omega}$，每过一周期，强负相关一次.

在[4]中利用 60 年间极移的观察资料，在除去长期极移与周年分量后，求得 ω 与 λ 的极大似然估值为

$$\omega\approx 5.274, \qquad \lambda\approx 0.06.$$

从而$\frac{2\pi}{\omega}\approx 1.2$年(约 14 个月),这与钱德勒周期符合.

8)"独立性"周期. 从理论上分析还可以发现另一新的周期$\frac{\pi}{\omega}$,它是上述相关周期的一半. 如果采用上面ω的估值 5.274,那么它约等于 0.6 年,即约 7 个月,也是钱德勒周期的一半. 每过此周期,坐标分量间即具有概率独立性. 事实上,由(2.13)可见当

$$\tau=\frac{(2k+1)\pi}{2\omega}\ (k=0,1,2,\cdots)\text{时},R(\tau)=E\xi_t\xi_{t-\tau}=0.$$

这表示诸随机变量$\xi_t,\xi_{t+\frac{\pi}{2\omega}},\xi_{t+\frac{3\pi}{2\omega}},\xi_{t+\frac{5\pi}{2\omega}},\cdots$是两两不相关的($t$任意固定),由于它们有正态分布,故也是两两独立的. 注意这些τ值中相邻两个的距离是$\frac{\pi}{\omega}$,这就是上述独立性周期. 对$\{\eta_t\}$也有同样结果.

类似地,考虑互相关函数

$$E\xi_t\eta_{t+\tau}=\frac{b^2}{2\lambda}e^{-\lambda|\tau|}\sin\omega\tau=-E\eta_t\xi_{t+\tau}. \tag{2.14}$$

与上同样推理,可见:当$\tau=\frac{(4k+1)\pi}{2\omega}\ (k=0,1,2,\cdots)$时$\xi_t$与$\eta_{t+\tau}$强正相关,周期为$\frac{2\pi}{\omega}$;当$\tau=\frac{(4k-1)\pi}{2\omega}\ (k=1,2,\cdots)$时,$\xi_t$与$\eta_{t+\tau}$强负相关,周期也是$\frac{2\pi}{\omega}$;最后,当$\tau=\frac{k\pi}{\omega}\ (k=0,1,2,\cdots)$时,$\xi_t$与$\eta_{t\pm\tau}$两两独立,这里$t$为任意固定的实数.

二坐标分量在不同的t上有上述种种独立性,周期都是$\frac{\pi}{\omega}$,是颇令人感到奇怪的.

15.3 地极移动模型的预测问题

试根据时刻t以前的全部观察值$X_s=\begin{pmatrix}\xi_s\\ \eta_s\end{pmatrix},(s\leqslant t)$,以最佳地预测将来的值$X_{t+\tau},(\tau>0)$. 最佳的标准是要求均方误差最小. 由

[5,396 页]知，$X_{t+\tau}$的最佳估值为

$$\overline{X}_{t+\tau}=E(X_{t+\tau}|X_s,s\leqslant t). \tag{3.1}$$

它是在已知$(X_s,s\leqslant t)$的条件下，$X_{t+\tau}$的条件数学期望. 但由于上节所述，X_t 是齐次马尔可夫过程，上式右方等于 $E(X_{t+\tau}|X_t)$. 为求后者，由(1.6)得

$$X_{t+\tau}=\mathrm{e}^{A\tau}\left(X_t+\int_t^{t+\tau}\mathrm{e}^{-A(s-t)}B\mathrm{d}W_s\right), \tag{3.2}$$

与(2.3)的推理一样，当 X_t 已知时，

$$E(X_{t+\tau}|X_t)=\mathrm{e}^{A\tau}X_t.$$

由此式及(3.1)，得最佳预测为

$$\overline{X}_{t+\tau}=\mathrm{e}^{A\tau}X_t. \tag{3.3}$$

以(1.9)代入此式，即得分量的最佳预测为

$$\overline{\xi}_{t+\tau}=\mathrm{e}^{-\lambda\tau}(\xi_t\cos\omega\tau-\eta_t\sin\omega\tau),$$

$$\overline{\eta}_{t+\tau}=\mathrm{e}^{-\lambda\tau}(\xi_t\sin\omega\tau+\eta_t\cos\omega\tau). \tag{3.4}$$

故预测值只指数型地依赖于最近期的一组观察值(ξ_t,η_t). 试求出预测的均方误差

$$\begin{aligned}\sigma^2(\tau)&\equiv E|X_{t+\tau}-\overline{X}_{t+\tau}|^2\\&=E(\xi_{t+\tau}-\overline{\xi}_{t+\tau})^2+E(\eta_{t+\tau}-\overline{\eta}_{t+\tau})^2.\end{aligned} \tag{3.5}$$

由(3.2)、(3.3)得

$$\begin{aligned}&E(X_{t+\tau}-\overline{X}_{t+\tau})(X_{t+\tau}-\overline{X}_{t+\tau})'\\&=E\left(\int_t^{t+\tau}\mathrm{e}^{A(\tau-s+t)}B\mathrm{d}W_s\right)\left(\int_t^{t+\tau}\mathrm{e}^{A(\tau-s+t)}B\mathrm{d}W_s\right)'\\&=\frac{b^2}{2\lambda}(1-\mathrm{e}^{-2\lambda\tau})\cdot I.\end{aligned} \tag{3.6}$$

由于(3.5)右方等于(3.6)中对角线上的元素之和，故

$$\sigma^2(\tau)=\frac{b^2}{\lambda}(1-\mathrm{e}^{-2\lambda\tau}). \tag{3.7}$$

注意(3.3)或(3.4)不仅是最佳线性预测公式，而且在非线性意义下也是最佳的. 这里我们充分地利用了二维过程(ξ_t,η_t)的马尔可夫性. 但如只考虑一个分量如 ξ_t，并取其开始分布为期望为 0、方差为$\frac{b^2}{2\lambda}$的正态分布，则它也构成一维平稳正态过程，但它不是一维

马尔可夫过程. 当然,对$\{\xi_t, t \geqslant 0\}$也可应用平稳过程的线性预测理论(见文献[6,第 184 页]),但公式变得相当麻烦.

15.4 小结

我们从运动方程组(1.1)出发,用数学的方法,证明了极移的随机激发数学模型X_t具有二维正态性、无后效性和遍历性. 如果选取(2.7)中的右方为开始分布,那么它还是平稳的. 这就是说,X_t的二级矩及有穷维分布都不随时间的推移而改变. 此外,研究相关函数后,可以发现X_t的二坐标间的关系,例如强相关性或独立性. 在研究了这些性质的基础上,导出了地极移动模型X_t的最佳预测公式.

上述结论的基础是方程组(1.1). 因此,问题在于(1.1)与极移运动符合到什么程度. 为此,我们可以检验观察资料是否的确具有上述的独立性周期. 任何数学模型只可能在若干主要方面符合实际,决不可能穷尽实际的无限丰富性. 我们深信,方程组(1.1)也只能是地极移动的一个近似模型.

从逻辑上看,激发函数应是比较一般的随机过程φ_t, ψ_t. 但文献[3,4]中从与实际的观察资料对比出发,认为假定它们是独立的布朗运动是有根据的.

在确定了模型以后,接着就是(1.1)中参数的估计问题. 如上所述,[4]中给出$\lambda \approx 0.06, \omega \approx 5.274$,[7]中为$\lambda \approx 0.067, \omega \approx 5.267$. 但另一些人则得到显著不同的估值. 在[3]中,每十年计算一次,而十年内则认为它们是常数,例如 1940—1950 年间$\lambda \approx 0.054, \omega \approx 5.256$; 1950—1960 及 1960—1970 间,$\lambda \approx 0.022, 0.008$; $\omega \approx 5.279, 5.250$. 可见$\lambda$的估值波动较大而$\omega$则较稳定. 求得$\lambda$与$\omega$后,利用$b^2 = \lambda(E\xi_t^2 + E\eta_t^2)$(见(2.13)式),即可由观察资料求出$b^2$的估值. 从而看出激发强度是如何变化的. 如果$\lambda$每十年而变,则$b^2$也如此.

我们求出了极移模型的最佳预测公式．是否可通过极移的预测来预测大地震，这是一个值得深入研究的问题．

参 考 文 献

[1] 傅承义．地球十讲．1976．

[2] 巴特 M．地震学的数学问题(郑治真译)．北京：科学出版社，1976．

[3] Naosuke Sekiguchi. On some natures of the exitation and damping of the polar motion. Rotation of the Earth, 1972; 221～223

[4] Арато М., Колмогоров А. Н., Синай Я Г. Об оценке параметров комплексного стационарного Гауссовского марковского процесса. Доклады. Акад. Наук СССР, 1962, 146(4): 747～750

[5] 王梓坤．随机过程论．北京：科学出版社，1965．

[6] Казакевич Д. И. 随机函数原理及其在水文气象学中的应用．汉译本，1974．

[7] Munk W H., Macdonald G J F. The Rotation of the Earth. 1960.（地球自转．李启斌译）．

第 4 卷

物理学中的随机过程理论

本卷研究的对象是物理学中的几类随机过程，主要是布朗运动，多指标 Ornstein-Uhlenbeck 过程和超过程，第 19 篇中还研究对称稳定过程．本卷含第 16 篇至第 25 篇共 10 篇．

第 16 篇是综述性的，综述了第 17 篇至第 25 篇中关于物理学中几类随机过程的若干理论研究结果．这些结果都是作者近些年获得的．

第 17 篇研究 $d(\geqslant 3)$ 维布朗运动末遇球面的时刻和位置；研究在末遇时刻以前布朗运动的极大游程，以及首次到达此极大游程的时刻．求出了这四种随机变量的分布和各级矩．矩的性质可以把高维布朗运动的维数区别开来．特别地要指出的是，证明了：

从 0 出发的高维布朗运动，其末遇点与首中点同分布，即球面上的均匀分布.

第 18 篇研究的内容较第 17 篇广泛，研究 $d(\geqslant 3)$ 维布朗运动关于 R^d 中有界可测集 B 的首中时 h_B，首中点 $x(h_B)$，末离时 l_B，末离点 $x(l_B)$ 四者的联合分布和极限分布. 在一些特殊情况下还可求出分布的数学表达式. 如果 $B=B_r$ 是一个球面，可得到更深刻的结果. 当维数 $d\to\infty$ 时，出现了一个类似于 Dirac 函数的新函数.

第 19 篇对右连续强马尔可夫过程定义了随机首波和随机末波. 这是一个首次引进的很形象的新概念. 对于对称稳定过程与布朗运动，求出了此二种波的分布以及它们到达时差的分布.

第 20 篇的原始论文是作者为庆贺李国平教授从事教育和科学工作五十周年而作. 这是国际上第一次定义并讨论多参数 Ornstein-Uhlenbeck 过程(简称 OU 过程)的开创性的论文. 它促进了我国学者对多参数随机过程特别是多参数马尔可夫过程的研究. 文中首先给出了 n 参数 Ornstein-Uhlenbeck 过程(OUP_n)的合理定义，讨论了它的性质，重点探讨多参数情形与单参数情形的不同之处，以及单参数情形与二参数情形之间的联系. 然后讨论二参数情形的三种马尔可夫性：单点的，宽过去的以及强马尔可夫性. 该文引起人们极大的兴趣，并出现了不少研究此种过程的论文. 在国外，OUP_2 最早于 1984 年由 Walsh 引进，其定义与本篇中的定义稍有不同，但对本篇中的定义稍作修改，Walsh 的定义便成为本篇中定义的特殊情形，见本书最后对第 20 篇及第 23 篇的注释.

第 21 篇继续研究二参数 Ornstein-Uhlenbeck 过程(OUP_2). 讨论此过程的转移概率及预测问题. 在“过去”是梯形域或矩形域的条件下，求出了过程的转移概率，作为特殊情形包含了三点转移概率. 还讨论了最佳预测问题和误差，对于上述区域，预测问题已解决.

第 22 篇研究多参数无穷维 Ornstein-Uhlenbeck 过程

(OUP_n^∞)和多参数无穷维布朗运动(BM_n^∞),以往均讨论维数有限的情形.首先给出了 OUP_n^∞ 和 BM_n^∞ 的定义.然后研究了当 $t\in R^n$ 固定时 OUP_n^∞ 在 Wiener 空间 W 上的分布 μ_t 和 BM_n^∞ 在 W 上的分布 V_t,讨论了 μ_t 和 ν_t 的支集,以及对 $t,t'\in R_+^n$,μ_t 与 $\mu_{t'}$,ν_t 与 $\nu_{t'}$,μ_t 与 ν_t 之间的相互绝对连续性和相互奇异性.

第 23 篇研究更广泛的 Ornstein-Uhlenbeck 过程,即多参数无穷维(γ,δ)-OU 过程,(γ,δ)-OUP_n^∞,其中 $\gamma\in[-\infty,0]$,$\delta=(\delta_1,\cdots,\delta_n)$,$\delta_i\in[-\infty,0]$,$i=1,2,\cdots,n$.它推广了第 22 篇中的 OU 过程 OUP_n^∞,后者是 $r=0,\delta=0$ 的特殊情形.本篇中研究了(γ,δ)-$OUP_n^\infty\{x_t(\cdot),t\geqslant\delta\}$对不同的固定 t,$X_t(\cdot)$的分布 μ_t 之间的绝对连续性.特别讨论了:(a) $r=-\infty,\delta=-\infty$;(b) $r=0,\delta=-\infty$;(c) $r=-\infty,\delta=0$;(d) $r=0,\delta=0$ 等特殊情形.此外,还讨论了当$|t|\to\infty$时,$X_t(\cdot)$的极限行为.

第 24 篇研究二参数正态过程的马尔可夫性.得到了二参数正态过程是宽过去马尔可夫过程的充分必要条件.对于梯形域找到了该过程的转移概率,顺便解决了对于梯形域的预测问题.

第 25 篇的原始论文是为庆祝李国平教授八十寿辰而作,是国内研究超过程的最早的论文.本篇研究超过程 y_u 的拉普拉斯泛函,$E_{r,\mu}e^{-\lambda<f,y_u>}$关于 λ 的幂级数展开以及各阶矩 $M_n=E_{r,\mu}[<f,y_u>]^n$,其中$<f,y_u>$表示非负函数 f 关于测度 y_u 的积分.

第16篇 物理学中的随机过程

16.1 布朗运动

关于布朗运动(Brown Motion,简记 BM)的研究已有很长的历史,其中包括 Einstein,Wiener,Levy 等大家的工作,但至今有关论文、新结果和新方法仍层出不穷;BM 已成为概率论的思想泉源.

设$(\Omega,\mathscr{F},P)$为概率空间,R^d 为 d 维欧氏空间,$\mathscr{B}^d$ 为 R^d 中子集 Borel σ-代数. 定义在$(\Omega,\mathscr{F},P)$上、取值于 R^d 中的随机过程 $B=\{B_t(\omega),t\geqslant 0\}(\omega\in\Omega)$称为 d 维 BM,如果

1) 对任意有限多个数 $0\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_m$,$B_{t_1}$,$B_{t_2}-B_{t_1}$,$\cdots$,$B_{t_m}-B_{t_{m-1}}$相互独立;

2) 对任意 $s\geqslant 0$,$t>0$,$B_{s+t}-B_s$ 有 d 维正态分布,密度为

$$p(t,x)=\frac{1}{(2\pi t)^{d/2}}\exp\left(-\frac{|x|^2}{2t}\right),x\in R^d;$$

3) 对每固定的 $\omega\in\Omega$,$t\to B_t(\omega)$连续.

B M 的轨道性质与空间维数 d 有关. 容易想象,d 越大,作 B M 的粒子越易发散. 周知,$d\leqslant 2$ 时,B 为常返:$d=1$ 时为点常返,即自任一点 $a\in R^d$ 出发,回到 a 无穷多次的概率为 1;$d=2$ 时为邻

域常返，即自 $a\in R^d$ 出发，以概率 1 回到 a 的任一邻域内（但不一定到 a）无穷多次. 这 2 种常返不同，后者弱于前者. $d\geqslant 3$ 时，B 为暂留（停留在有界域内是暂时的），即有 $P(\lim\limits_{t\to\infty}|B_t|=\infty)=1$. 对比于常返情况，自然会想到，暂留的程度应随 d 而变；d 越大，停留在有界域内的时间应越短，或趋于∞的速度应越快. 如何定量地描述这种程度？下面便来研究此问题.

对 $A\in\mathscr{B}^d$，分别定义 A 的首中时 h_A 与末离时 l_A 为

$h_A(\omega)=\inf(t>0,B_t\in A)$，如右方 t 集非空；反之，$h_A(\omega)=\infty$.

$l_A(\omega)=\sup(t>0,B_t\in A)$，如右方 t 集非空；反之，$l_A(\omega)=0$.

称 $B(h_A)(=B_{h_A})$及 $B(l_A)$分别为 A 的首中点与末离点，它们的分布分别记为

$$H_A(x,\mathrm{d}y)=P_x(B(h_A)\in \mathrm{d}y),$$

$$L_A(x,\mathrm{d}y)=P_x(B(l_A)\in \mathrm{d}y,l_A>0),$$

其中 P_x 表示当 $B_0=x$ 时 BM 的条件概率.

求出这些随机变量的分布是重要的问题，对一般的 A，难以找到，但当 $A=S_r=(x:|x|=r)$时，前人已求出球面 S_r 的首中点的分布为

$$P_x(B(h_r)\in D)=\int_D\frac{r^{d-2}\big||x|^2-r^2\big|}{|y-x|^d}U_r(\mathrm{d}y)$$
$$(|x|<r,D\subset S_r,h_r=h_{s_r}),\tag{1.1}$$

其中 $U_r(\mathrm{d}y)$为球面 S_r 上的均匀分布. 特别

$$P_0(B(h_r)\in D)=U_r(D),\tag{1.2}$$

即如 BM 自 O 点出发，则 S_r 的首中点在 S_r 上有均匀分布.

至于首中时 h_r 的分布则较复杂，文献[1]中已求得

$$P_0(h_r>a)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_{di}\exp\left(-\frac{q_{di}^2}{2r^2}a\right)\ (a\geqslant 0),\tag{1.3}$$

其中 q_{di} 是 Bessel 函数 $J_v(z)(v=d/2-1)$ 的正零点，

$$\xi_{di}=q_{di}^{v-1}/2^{v-1}\Gamma(v+1)J_{v+1}(q_{di}).$$

以下恒设　$d\geqslant 3$.

我们来求末离时与末离点的分布，初想似乎问题会更复杂，但

下面看到并非常如此. 记

$$g(x,y) = \int_0^\infty p(t,x-y)\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(d/2-1)}{2\pi^{d/2}} \cdot \frac{1}{|x-y|^{d-2}}.$$

定理 1.1 设 A 为相对紧集,在弱收敛下有

$$L_A(x,\mathrm{d}y) = g(x,y) \lim_{|z|\to\infty} (H_A(z,\mathrm{d}y)/(g(z,y))). \tag{1.4}$$

因而末离点分布可通过首中点分布而求出.

定理 1.2 对任何 $x \in R^d, D \subset S_r, D \in \mathscr{B}^d$,

$$P_x(B(l_r) \in D, l_r > 0) = \int_D \frac{r^{d-2}}{|x-y|^{d-2}} U_r(\mathrm{d}y). \tag{1.5}$$

特别,$P_0(B(l_r) \in D, l_r > 0) = U_r(D)$.

这说明球面的首中点与末离点当 $B_0 = 0$ 时有相同的均匀分布. 初看也许奇怪,但可如下直观理解. 自内球心 O 出发之 BM 对 S_r 之末离点,可看成为自外球心∞出发对 S_r 之首中点,而后者可设想有均匀分布.

关于联合分布,则有

定理 1.3 对 $D \subset S_r, D \in \mathscr{B}^d, t > 0$,

$$P_x(B(l_r) \in D, l_r > t) = \frac{r^{d-2}}{(2\pi t)^{d/2}|S_r|} \int_{R^d} \mathrm{e}^{-|y-x|^2/2t} \int_D \frac{L_{d-1}(\mathrm{d}z)}{|y-z|^{d-2}} \mathrm{d}y, \tag{1.6}$$

其中 $|S_r|$ 为 S_r 的面积,L_{d-1} 表示 $d-1$ 维 Lebesgue 测度.

由此可推出

定理 1.4 当 $B_0 = 0$ 时,末离时 l_r 有分布密度

$$f_r(s) = \frac{r^{d-2}}{2^{d/2-1}\Gamma(d/2-1)} s^{-d/2} \mathrm{e}^{-r^2/2s} \quad (s > 0, d \geqslant 3). \tag{1.7}$$

此分布在概率论中似是首次出现,以前未见过. 很巧,$f_1(s)$ 正好是 η^{-1} 的分布,η 是具有自由度为 $d-2$ 的 χ^2-分布的随机变数.

注 1.1 当且只当 $m < d/2 - 1$ 时,m 级矩 $E_0(l_r^m) < \infty$,而且

$$E_0(l_r^m) = r^{2m}/[(d-4)(d-6)\cdots(d-2m-2)]$$
$$(d>4). \tag{1.8}$$

现在可以回答上述关于暂留程度的问题. 如粒子趋于∞越快,则它末离 S_r 的时间 l_r 越小,从而使 $c_l=\max(m:E_0(l_r)^m<\infty)$ 越大. 由(1.8)知的确如此,$c_l=c_l(d)$是 d 的函数,

$c_l=0$, 如 $d=3$, 4; $c_l=1$, 如 $d=5,6$; $c_l=2$,如 $d=7,8;\cdots$;

$c_l=k-2$,如 $d=2k-1,2k$.

这表示:当 $d=7,8$ 时,l_r 的一阶及二阶矩有穷,但二阶以上的矩皆无穷等等. 于是空间的维数相对于 l_r 有成双性. 如还要区别成双的维数,可引进另一随机变数

$$M_r=\max_{0\leqslant t\leqslant l_r}|B_t|,$$

它是 BM 末离 S_r 前所达到的极大游程. 令 $G_x(a)=P_x(M_r\leqslant a)$, $|x|\leqslant r$,则 $G_x(a)$有密度(与 x 无关)为

$$g(a)=(d-2)r^{d-2}/a^{d-1},\ a>r;\ g(a)=0, a\leqslant r.$$

当且只当 $m<d-2$ 时,$E_x(M_r^m)<\infty$,又

$$E_x(M_r^m)=[(d-2)/(d-m-2)]r^m,$$

由此知:d 越大,极大游程越短;精确些,令 $c_E=\max(m:E_x(M_r^m)<\infty)$,则

$$c_E=2k-4,\text{如 } d=2k-1; c_E=2k-3,\text{如 } d=2k.$$

当 $d\to\infty$时,$E_x(M_r^m)\to r^m$;又

$$\lim_{d\to\infty}P_x\left[\frac{M_r-r}{\sqrt{D_x(M_r)}}\leqslant a\right]=\begin{cases}1-e^{-a}, & a>0;\\ 0, & a\leqslant 0.\end{cases}$$

记号 D 表示方差,$D_x(M_r)=(d-2)r^2/[(d-3)^2(d-4)]$.

上述的一些结果可推广至对称稳定过程[2,3]. 关于作布朗运动的粒子($d\geqslant 3$ 时)趋向无穷远的方式可见[4];粗略地说,它必须通过一切方向绕无穷远点作无穷次徘徊后方能趋于无穷远. 更多的结果见[6,5].

再引进 2 个随机变量 J_r 与 α_r:

$$J_r=\int_0^\infty I_{U_r}(B_t)\mathrm{d}t,$$

它是 d 维 BM 在球 $U_r=(x:|x|\leqslant r)$ 中的总停留时间，$I_{U_r}(y)=1$，如 $|y|\leqslant r$；否则为 0.

$\alpha_r=\min(t:|B_t|=M_r)$ 是首次达到 M_r 的时刻. [2]中求得

$$P_0(\alpha_r>t)=(d-2)r^{d-2}\sum_{i=1}^{\infty}\xi_{di}\int_r^{\infty}\frac{1}{s^{d-1}}\mathrm{e}^{-q_{di}^2t}\mathrm{d}s,$$

ξ_{di} 与 q_{di} 的意义见(1.3)式.

在四变量 h_r，J_r，α_r，l_r 间有一简单有趣的关系：

$$E_0h_r=\frac{r^2}{d}<E_0J_r=\frac{r^2}{d-2}<E_0\alpha_r=\frac{(d-2)r^2}{d(d-4)}<E_0l_r=\frac{r^2}{d-4},$$

故当 $d\to\infty$，任二变量的平均值之比趋于 1，特别

$$E_0h_r/(E_0l_r)=(d-4)/d\to 1.$$

这表示：当 d 充分大时，自 O 出发的 BM 在首达 S_r 后，几乎立即就永远离开 S_r.

16.2 多指标 Ornstein-Uhlenbeck 过程

这类过程的研究开始于 1983 年[7]，那里给出了定义及性质. 其后出现了许多研究论文.

令 $Z=(z_1,\cdots,z_n)\in R^n$，$R_+^n=(Z:z_i\geqslant 0,i=1,\cdots,n)$. 说 $Z\leqslant Y$，如其坐标 $z_i\leqslant y_i(i=1,\cdots,n)$. 称 $W=\{W(Z),Z\in R_+^n\}$ 为 n 指标 BM，如它是实值正态过程，而且

$$EW(Z)=0,\quad EW(Z)W(Y)=\prod_{i=1}^{n}(z_i\wedge y_i),\tag{2.1}$$

其中 $\quad z_i\wedge y_i=\min(z_i,y_i)$.

取 n 维向量 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，$\alpha_i>0$，常数 $\sigma>0$，定义

$$X(Z)=\mathrm{e}^{-\alpha Z}\left[X_0+\sigma\int_0^Z\mathrm{e}^{\alpha a}\mathrm{d}W(a)\right],\tag{2.2}$$

其中 αZ 等为内积，X_0 为与 W 独立的随机变数，$\int$ 表示 n 重随机积分. 称 $X=\{X(Z),Z\in R_+^n\}$ 为 n 指标 1 维 OU 过程，记为 $\mathrm{OU}P_n^1$.

设 $X_1,\cdots,X_d$ 为 d 个独立的 OUP_n^1，称

$$Z_n^d=\{(X_1(Z),\cdots,X_d(Z)),Z\in R_+^n\} \tag{2.3}$$

为 n 指标 d 维 OUP，记为 OUP_n^d.

为叙述简明，考虑 OUP_2^1，$X=\{X(s,t),(s,t)\in R_+^2\}$. 以下用 $\sigma\{\cdot\}$表示括号中随机变量产生的 σ-代数. X 是通常意义下的马尔可夫过程：设$(u,v)\leqslant(s,t)$，$\mathscr{F}_{uv}=\sigma\{X(a,b),a\leqslant u,b\leqslant v\}$，则在 $X(u,v)=x$ 的条件下，$X(s,t)$与 $\mathscr{F}_{uv}$独立；(单点)转移概率$P((u,v),x;(s,t),\mathrm{d}y)=P(X(s,t)\in\mathrm{d}y|X(u,v)=x)$可以求出. 但这种马尔可夫性在多指标情况不够用，因为它不足以决定 X 的有限维联合分布. 因而需要所谓"宽过去马尔可夫性". 令 $\mathscr{F}_{uv}^*=\sigma\{X(a,b),a\leqslant u$ 或 $b\leqslant v\}$，显然 $\mathscr{F}_{uv}^*\supset\mathscr{F}_{uv}$；故 $\mathscr{F}_{uv}^*$代表宽过去. 取 4 点 $Z_1=(u,v)<Z_2=(s,t),Z_3=(s,v),Z_4=(u,t)$，有

定理 2.1 以概率 1 有

$$\begin{aligned}
&P(X(Z_2)\leqslant y|\mathscr{F}_{uv}^*)\\
&=P(X(Z_2)\leqslant y|X(Z_1),X(Z_3),X(Z_4))\\
&=\int_{-\infty}^{y}f(Z_1,x_1;Z_3,x_3;Z_4,x_4;Z_2,\xi)\mathrm{d}\xi,
\end{aligned} \tag{2.4}$$

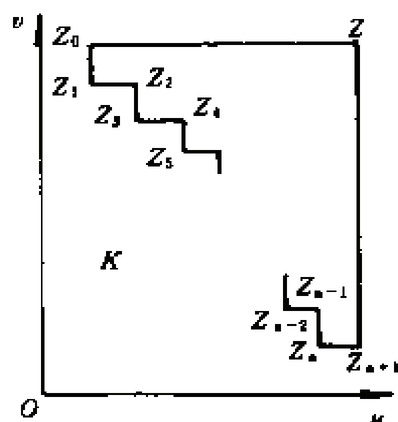
其中 $x_i=X(Z_i)$，$i=1,3,4$；而被积函数

$$\begin{aligned}
&f=\frac{1}{H\sqrt{2\pi}}\exp\{-|\xi+\mathrm{e}^{-\alpha(s-u)-\beta(t-v)}x_1-\mathrm{e}^{-\beta(t-v)}x_3\\
&\qquad-\mathrm{e}^{-\alpha(s-u)}x_4|^2/2H^2\},\\
&H^2=\sigma^2(1-\mathrm{e}^{-2\alpha(s-u)})(1-\mathrm{e}^{-2\beta(t-v)})/4\alpha\beta.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

称 f 为三点转移概率密度，它是时齐的，即只依赖于 $s-u$ 与 $t-v$；它对一切变量及参数 $\alpha>0,\beta>0,\sigma>0$ 连续；当 $s\to\infty,t\to\infty$ 时，f 趋于正态分布 $N(0,\sigma^2/4\alpha\beta)$的密度.

考虑更一般的过去. 对 $F\in\mathscr{B}_+^2$，令 $\mathscr{F}_F=\sigma\{X(Z),Z\in F\}$，称 R_+^2 中的单减曲线为简单的，如它由有限或可列多条平行于二坐标轴之一的直线段所组成. 而且在任一 $R_Z=\{y:0\leqslant y\leqslant Z\}$内只有有限多个角点，每一角点是上述两直线段的交点. 由两坐标轴及一简单曲线围成的闭域称为梯形域.

设 K 为梯形域，点 $Z(s,t)\overline{\in}K$. 自 Z 引两平行于二坐标轴的直线段. 交 K 的边界 ∂K 于 Z_0,Z_{n+1} 两点. 此两点间的角点顺次记为 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$. 设 Z_i 有坐标 (u_i,v_i)，显然，$u_0=u_1<u_2<\cdots<u_n<u_{n+1}=s$，$t=v_0>v_1=v_2>v_3=\cdots>v_n=v_{n+1}$.



附图

定理 2.2 设 $Z\overline{\in}K$，有

1) $P(X(Z)\leqslant a\,|\,\mathscr{F}_K)=P(X(Z)\leqslant a\,|\,X(Z_i),i=0,1,\cdots,n+1)(a.s.)$，

2) 在 $X(Z_i)=x_i(i=0,1,\cdots,n+1)$ 的条件下，$X(Z)$ 有正态分布 $N(m,\Sigma^2)$. 其中

$$m=\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i e^{-\alpha(s-u_i)-\beta(t-v_i)}x_i,$$

$$\Sigma^2=\sigma^2 e^{-2\alpha s-2\beta t}\iint\limits_{R_Z\setminus K}e^{2\alpha a+2\beta b}\mathrm{d}a\mathrm{d}b. \qquad (2.6)$$

利用此定理可解决预测问题. 令 $L^2(K)=\{h(\omega):h$ 为 $\mathscr{F}_K$ 可测且 $E|h|^2<\infty\}$，今欲求 $l(Z,K)\in L^2(K)$，使 $E|X(Z)-l(Z,K)|^2=\inf\limits_{h\in L^2(K)}E|X(Z)-h|^2$. 称 $l(Z,K)$ 为 $X(Z)$ 关于 $\{X(y),y\in K\}$ 的预测量. 预测误差定义为

$$\varepsilon(Z,K)=E|X(Z)-l(Z,K)|^2.$$

可以证明：设 $Z(s,t)\overline{\in}K$，则

$$l(Z,K)=\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i e^{-\alpha(s-u_i)-\beta(t-v_i)}X(Z_i),$$

$$\varepsilon(Z,K)=\Sigma^2.$$

现在讨论 OUP_2^1 与 OUP_1^1 的关系. 回忆 OUP_2^1 为

$$X(s,t)=e^{-\alpha s-\beta t}\left[X_0+\sigma\int_0^s\int_0^t e^{\alpha a+\beta b}\mathrm{d}W(a,b)\right].$$

在其中固定 $t=c$ 而得单指标过程 $X_c=\{X(s,c),s\geqslant 0\}$，它是 X 的 c-截口.

定理 2.3 1) X_c 等价于(即有相同的有限维分布)某 OUP_1^1，后者有参数

$\tilde{\alpha}=\alpha$, $\tilde{\sigma}=\sigma[(1-e^{-2\beta c})/2\beta]^{1/2}$, $\tilde{X}_0=X(0,c)$.

2) 反之,存在两列独立的 OUP_1^1,$\{X^i(s),s\geqslant 0\}$及$\{Y^i(t),t\geqslant 0\}(i=1,2,\cdots)$,使对任意点$(s,t)\in R_+^2$,有

$$\lim_{n\to\infty} P(e^{-\alpha s-\beta t}X_0+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}X^i(s)Y^i(t)\leqslant a)$$
$$=P(X(s,t)\leqslant a), \tag{2.7}$$

其中 $X^i(0)=Y^i(0)=0$,X^i 及 Y^i 的参数分别为 $\alpha,\sigma=1$ 及 $\beta,\sigma=1$.

现在关于 OUP_n^d 已有许多工作,如研究了它的轨道性质、常返性、像集及图集的 Hausdorff 维数,相遇与自相交问题、重对数定理等等.

今讨论 n 指标无穷维 OU 过程,记为 OUP_n^∞. 先需给出定义. 考虑 OUP_{n-1}^1,即

$$X(s,t)=e^{-\alpha s-\beta t}\left[x_0+\sigma\int_0^s\int_0^t e^{\alpha a+\beta b}W(da,db)\right]. \tag{2.8}$$

我们把 $n+1$ 个指标记为$(s,t)=(s,t_1\cdots,t_n)\in R_+^{n+1}$,下面会看到 s,t_i 的不同作用;$n+1$ 个参数也分别记为 $\alpha,\beta_1,\cdots,\beta_n$,其中 $\alpha>0$,$\beta_i>0$. 设 x_0 为 $N(0,d)$分布的随机变量,与 W 独立. 固定 t,$X(s,t)$对 $s\geqslant 0$ 连续,而且等价于某 OUP_1^1,因而是 Wiener 空间$(C,\mathscr{F}_c)$中随机元,它在$(C,\mathscr{F}_c)$中的正态分布记为 μ_t. 今定义 $R_+^n\to(C,\mathscr{F}_c)$中随机过程

$$X_t(\cdot)=X(\cdot,t), \tag{2.9}$$

其中 $X(\cdot,t)$由(2.8)给出;并称$\{X_t(\cdot),t\in R_+^n\}$为 OUP_n^∞.

周知:同一可测空间上二正态测度或者相互绝对连续(记为$\Leftrightarrow$),或者相互奇异(记为$\perp$).

定理 2.4 固定 R_+^n中的点 t 及 t',

1) $\mu_t\Leftrightarrow\mu_{t'}$之充要条件为

$$\prod_{i=1}^{n}(1-e^{-2\beta_i t_i})=\prod_{i=1}^{n}(1-e^{-2\beta_i t_i'}). \tag{2.10}$$

2) μ_t 集中在 S_t 上,即 $\mu_t(S_t)=1$,这里

$$S_t = \left\{ f; f \in C, \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2^n} \left| f\left(\frac{k}{2^n}\right) - f\left(\frac{k-1}{2^n}\right) \right|^2 \right.$$

$$\left. = \sigma^2 \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1-e^{-2\beta_i t_i}}{2\beta_i} \right] \right\}. \tag{2.11}$$

3) 如 $n=1$，则一切 $\mu_t(t>0)$ 皆相互奇异.

这揭示多指标过程与单指标过程之一区别，对后者一切 μ_t 奇异，而对前者，则某些 μ_t，$\mu_{t'}$ 可相互绝对连续，只要 t，t' 属于同一个 $E_\delta = \left\{ t \in R_+^n : \prod_{i=1}^{n} (1-be^{-2\beta_i t_i}) = \delta \right\}$，这里常数 δ 满足 $0<\delta<1$. 可称 E_δ 为水平 δ 的等度连续集. $n=1$ 时，E_δ 只含单点.

OUP_1^∞ 在随机分析中有重要应用，但对 OUP_n^∞ 的研究则似乎刚开始. 对多指标无穷维 BM，也有与定理 2.4 类似的结果. 以上参看文献[7～12].

16.3 超布朗运动与超过程

直观背景如下：设诸粒子在 $t=0$ 时按 Poisson 点过程 π_θ 而分布，其强度为有限测度 θ，即

$$P(\pi_\theta(B)=n) = \frac{[\theta(B)]^n}{n!} e^{-\theta(B)}; \quad n=0,1,2,\cdots. \tag{3.1}$$

$B \in \mathscr{B}^d$，$\pi_\theta(B)$ 表示 $t=0$ 时位于 B 中的粒子数. 设每粒子沿 d 维 BM 的轨道 ξ 而运动，其寿命随机，有参数为 γ 的指数分布. 一粒子死后立即在死亡处以概率 1/2 永远消失，以概率 1/2 消失并产生 2 个同样的粒子. 新粒子又沿 ξ 的轨道相互独立地并且与其父辈也独立地同样运动. 如此继续. 设每粒子的质量为 β. 以 $Y_t^\beta(B)$ 表示 t 时位于 B 中诸粒子的质量和. 令 $\beta \to 0$，强度 $\theta \to \infty$，平均寿命 $1/\gamma \to 0$. 则在适当条件下，$\{Y_t^\beta\}$ 弱收敛于某过程——超布朗运动. 类似地，如以一般的马尔可夫过程 X 代替布朗运动，所得的极限过程 $\{Y_t\}$ 称为超过程(Superprocess). 后者的严格数学定义

如下.

设$(E,\mathscr{B})$为可测空间，$X=\{x_t,t\geqslant 0\}$为取值于$(E,\mathscr{B})$中的马尔可夫过程，有转移概率 $p(s,x;t,\mathrm{d}y)$，算子半群为$\{T_u^r\}$

$$T_u^r f(x)=\int_E P(r,x;u,\mathrm{d}y)f(y),\qquad f\in B_+^b.$$

B_+^b为定义在E上全体非负有界$\mathscr{B}$可测函数之集. 简记

$$\langle f,v\rangle=\int f\mathrm{d}v.$$

定义在$\mathscr{B}$上全体有限测度μ之集记为$\mathscr{M}$，$\mathscr{B}_m$为$\mathscr{M}$中含下形集的最小σ代数$(\mu;\mu\in\mathscr{M},\mu(A)\leqslant a)$，$A\in\mathscr{B}$，$a\geqslant 0$. 设对每$t\geqslant 0$，存在取值于$(\mathscr{M},\mathscr{B}_m)$中的随机变量$y_t$. 称$Y=\{y_t,t\geqslant 0\}$为($X$的)超过程，如它是马尔可夫过程，而且对每$f\in B_+^b$，$\mu\in\mathscr{M}$，$\lambda>0$，有

$$E_{r\mu}\exp\{-\lambda\langle f,y_u\rangle\}=\exp\{-\langle V_u^r(\lambda f),\mu\rangle\}.\qquad(3.2)$$

其中$V_u^r(u>r\geqslant 0)$为作用于B_+^b上的压缩非线性算子半群，满足

$$V_u^r(\lambda f)=-\int_r^u T_s^r[(V_u^s(\lambda f))^2]\mathrm{d}s+\lambda T_u^r f.\qquad(3.3)$$

前人已证明式(3.3)有唯一解V_u^r，因而可通过式(3.2)左方中拉普拉斯变换，以求出Y的转移概率$q(r,\mu;u,\mathrm{d}v)$. 但式(3.3)中解实际上难以求出，故希望另觅途径. 下面我们给出此拉普拉斯变换的一幂级数展式，并求出各级矩$M_n=E_{r,\mu}[\langle f,y_u\rangle^n]$.

记$\|f\|=\sup\limits_{x\in E}|f(x)|$，对$s<u$，设函数$\varphi_u^s(x)$及$\varphi_u^s(x)$皆属于$B_+^b$. 定义卷积

$$(\varphi*\psi)_u^r=\int_r^u T_s^r(\varphi_u^s\psi_u^s)\mathrm{d}s,$$

对$f\in B_+^b$，记

$$\varphi^{1*}\equiv\varphi\equiv\varphi_u^r=T_u^r f,\quad \varphi^{n*}=\sum_{k=1}^{n-1}\varphi^{k*}*\varphi^{(n-k)*},$$

$$\Phi_n=\langle\varphi^{n*},\mu\rangle.$$

定理 3.1 当$|\lambda|<R=1/4(u-r)\|\varphi\|$，有

$$E_{r,\mu}\exp[-\lambda\langle f,y_u\rangle]=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n\lambda^n,$$

其中 $b_0 = 1$,

$$nb_n = \sum_{k=1}^{n} k\Phi_k b_{n-k}.$$

定理 3.2 各级矩 $M_n, n=1,2,\cdots$存在,可由下列递推式依次求出:

$$M_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k^{n-1}(n-k)!\Phi_{n-k}M_k$$

$(M_0=1, C_0^{n-1}=1)$. 诸矩唯一决定$\langle f, y_u\rangle$关于 $P_{r,\rho}$之分布[13].

参考文献

[1] Ciesielski Z, Taylor S J. First passage times and sojourn times for Brownian motion in space and exact Hausdorff measure of the sample path. Trans Amer Math Soc, 1962, 103:434

[2] 王梓坤. 布朗运动的末遇分布与极大游程. 中国科学, 1980(10):933

[3] 王梓坤. 对称稳定过程与布朗运动的随机波. 中国科学. 1982(9):801

[4] 王梓坤. 暂留马尔可夫过程向无穷大的徘徊. 北京师范大学学报(自然科学版), 1986, 22(3):21

[5] 吴荣. d 维布朗运动末离时的分布. 科学通报, 1984, 21:647

[6] 周性伟, 吴荣. 关于布朗运动的某些极值定理. 中国科学. A 辑, 1983(2):128

[7] 王梓坤. 二参数 Ornstein-Uhlenbeck 过程. 数学物理学报, 1983(4):395

[8] 王梓坤. 二参数 Ornstein-Uhlenbeck 过程的转移概率及预测. 科学通报, 1986, 23:1761

[9] 王梓坤. 多参数无穷维 Ornstein-Uhlenbeck 过程与布朗运动. 数学物理学报, 1993, 13(4):455~459

[10] 陈雄. 二参数 Ornstein-Uhlenbeck 过程图集及像集的 Hausdorff 维数. 数学学报, 1989, 32(4):433

[11] 罗首军. 二参数 Ornstein-Uhlenbeck 过程最大值分布估计. 数学学报, 1988, 31(6):721

[12] 李应求. 二参数 Ornstein-Uhlenbeck 过程在射线上的导出过程. 应用概率统计,1989,5(4):303
[13] 王梓坤. 超过程的幂级数展开. 数学物理学报,1990,10(4):361

第17篇 布朗运动的末遇分布与极大游程

17.1 末遇位置的分布

设 $X=\{X_t,t\geqslant 0\}$ 为 $n(\geqslant 3)$ 维欧氏空间 R^n 中的布朗运动，$\mathscr{B}^n$ 为 R^n 中全体 Borel 集所成的 σ-代数. 对 $B\in\mathscr{B}^n$，定义 B 的首中时与末遇时分别为：

$$T_B=\begin{cases}\inf(t>0,X_t\in B), & \text{如右方集非空，}\\ \infty, & \text{反之；}\end{cases}$$

$$\gamma_B=\begin{cases}\sup(t>0,X_t\in B), & \text{如右方集非空，}\\ 0, & \text{反之.}\end{cases}$$

首中位置 $X(T_B)$ 与末遇位置 $X(\gamma_B)$ 的分布分别记为：

$$H_B(x,A):=P_x(X(T_B)\in A),$$

$$L_B(x,A):=P_x(X(\gamma_B)\in A,\gamma_B>0),$$

P_x 表示开始分布集中在点 x 上的条件概率，对应的数学期望记为 E_x. 转移概率密度为：

$$p(t,x,y)=\frac{1}{(2\pi t)^{n/2}}\exp\left(-\frac{|y-x|^2}{2t}\right).$$

势核为：

$$u(x,y) = \int_0^\infty p(t,x,y)\mathrm{d}t = K/|x-y|^{n-2}, \tag{1.1}$$

$$K = \Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)\Big/2\pi^{n/2}.$$

测度 ν 的势定义为

$$U_\nu(x) = \int_{R^n} u(x,y)\nu(\mathrm{d}y).$$

定理 1.1 对任一相对紧集 B，有

$$L_B(x,\mathrm{d}y) = u(x,y)\lim_{|z|\to\infty}\frac{H_B(z,\mathrm{d}y)}{u(z,y)}. \tag{1.2}$$

证 考虑 $H_B1(x)\equiv P_x(T_B<\infty)$. 以 ∂B 表示 B 的界. 由文献[1]，存在 σ-有穷测度 μ_B，它的框(support)含于 ∂B 中，而且对一切 $x\in R^n$，有

$$H_B1(x) = U_{\mu_B}(x), \tag{1.3}$$

$$\mu_B(\mathrm{d}y) = L_B(x,\mathrm{d}y)/u(x,y). \tag{1.4}$$

另方面，由文献[2]，存在测度 ν_B，其框含于 ∂B 中，而且对一切 $x\in R^n$，有

$$H_B1(x) = U_{\nu_B}(x), \tag{1.5}$$

$$\nu_B(\mathrm{d}y) = \lim_{|z|\to\infty}\frac{H_B(z,\mathrm{d}y)}{u(z,0)}. \tag{1.6}$$

注意 $H_B1\leqslant 1$. 由(1.3)，(1.5)式及负荷(charge)的唯一性，得

$$\mu_B(\mathrm{d}y) = \nu_B(\mathrm{d}y), \tag{1.7}$$

以(1.4)、(1.6)式代人(1.7)式，并注意

$$\lim_{|z|\to\infty}\frac{u(z,y)}{u(z,0)} = 1,$$

即(1.2)式得证. ∎

此定理表示：末遇位置分布可通过首中位置分布表达出来.

以下主要考虑球 S_r 与球面 ∂S_r：

$$S_r = (x: |x|\leqslant r), \partial S_r = (x: |x| = r) \quad (r>0).$$

由轨道的连续性，$P_x(\gamma_{S_r} = \gamma_{\partial S_r}) = 1$，又因 $n\geqslant 3$，$P_x(\gamma_{S_r}<\infty) = 1$ ($x\in S_r$).

系 1.1 对一切 x，有

$$L_{\partial S_r}(x,\mathrm{d}y)=\frac{r^{n-2}}{|x-y|^{n-2}}U_r(\mathrm{d}y),\tag{1.8}$$

$$L_{\partial S_r}(0,\mathrm{d}y)=U_r(\mathrm{d}y),\tag{1.9}$$

其中 $U_r(\mathrm{d}y)$ 表示球面 ∂S_r 上的均匀分布，即

$$U_r(\mathrm{d}y)=\frac{1}{|\partial S_r|}L_{n-1}(\mathrm{d}y).\tag{1.10}$$

这里 $|\partial S_r|$ 表示 ∂S_r 的面积，L_{n-1} 表示 R^{n-1} 上 Lebesgue 测度.

证 由解 Dirichlet 问题(见文献[3,第 13 章])，可求得

$$H_{\partial S_r}(z,\mathrm{d}y)=r^{n-2}||z|^2-r^2||y-z|^{-n}U_r(\mathrm{d}y).\tag{1.11}$$

由此及(1.1)式，得知在强收敛下，

$$\lim_{|z|\to\infty}\frac{H_{\partial S_r}(z,\mathrm{d}y)}{u(z,y)}=\frac{r^{n-2}}{K}U_r(\mathrm{d}y),\tag{1.12}$$

将(1.12)及(1.1)式代入(1.2)式，即得(1.8)式. 在(1.8)式中取 $x=0$，并注意 $y\in\partial S_r$ 时，$|y|=r$，即得(1.9)式. ∎

众所周知：$H_{\partial S_r}(0,\mathrm{d}y)=U_r(\mathrm{d}y)$，故自 0 出发，首中与末遇 ∂S_r 的位置有相同的分布，即球面 ∂S_r 上的均匀分布((1.10)式).

注 1.1 根据积分等式

$$\frac{1}{|\partial S_r|}\int_{\partial S_r}\frac{L_{n-1}(\mathrm{d}z)}{|y-z|^{n-2}}=\begin{cases}|y|^{2-n}, & \text{如 } |y|>r;\\ r^{2-n}, & \text{如 } |y|\leqslant r,\end{cases}\tag{1.13}$$

由(1. 8)及(1. 10)式可推出一熟知结果，见文献[3,第 13 章 § 3]：

$$P_x(T_{\partial S_r}<\infty)=L_{\partial S_r}(x,\partial S_r)$$

$$=\frac{r^{n-2}}{|\partial S_r|}\int_{\partial S_r}\frac{L_{n-1}(\mathrm{d}y)}{|x-y|^{n-2}}=\begin{cases}\left|\dfrac{r}{x}\right|^{n-2}, & \text{如 } |x|>r;\\ 1, & \text{如 } |x|\leqslant r.\end{cases}\tag{1.13$'$}$$

关于末遇位置与末遇时的联合分布，有

定理 1.2 对 $D\subset\partial S_r, D\in\mathscr{B}^n, t>0$,

$$P_x(X(\gamma_{\partial S_r})\in D,\gamma_{\partial S_r}>t)$$

$$=\frac{r^{n-2}}{(2\pi t)^{n/2}|\partial S_r|}\int_{R^n}\mathrm{e}^{-|y-x|^2/2t}\int_D\frac{L_{n-1}(\mathrm{d}z)}{|y-z|^{n-2}}\mathrm{d}y.\tag{1.14}$$

证 令 $C=(X(\gamma_{\partial S_r})\in D,\gamma_{\partial S_r}>0)$，则 $P_y(C)=L_{\partial S_r}(y,D)$.

由 Markov 性，

$$P_x(X(\gamma_{\partial S_r}) \in D, \gamma_{\partial S_r} > t) = E_x P_{X(t)}(C)$$

$$= \int_{R^n} P_y(C) p(t, x, y) \mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} \int_{R^n} \mathrm{e}^{-|y-x|^2/2t} L_{\partial S_r}(y, D) \mathrm{d}y.$$

将(1.8)及(1.10)式代入，即有(1.14)式. ∎

17.2 末遇时的分布

设 $F_{0r}(t) := P_0(\gamma_{\partial S_r} \leqslant t)$.

定理 2.1* $F_{0r}(t) = \int_0^t f(s) \mathrm{d}s$ 有密度函数为：

$$f(s) = \frac{r^{n-2}}{2^{(n/2)-1} \Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right)} s^{-\frac{n}{2}} \mathrm{e}^{-r^2/2s}. \tag{2.1}$$

证 在(1.14)式中取 $D = \partial S_r$，得

$$P_0(\gamma_{\partial S_r} > t)$$

$$= \frac{r^{n-2}}{(2\pi t)^{n/2} |\partial S_r|} \left[\int_{|y| \leqslant r} \mathrm{e}^{-|y|^2/2t} \int_{\partial S_r} \frac{L_{n-1}(\mathrm{d}z)}{|y - z|^{n-2}} \mathrm{d}y + \int_{|y| > r} \mathrm{e}^{-|y|^2/2t} \int_{\partial S_r} \frac{L_{n-1}(\mathrm{d}z)}{|y - z|^{n-2}} \mathrm{d}y \right].$$

将(1.13)式代入，引入极坐标，作积分变换后，得

$$P_0(\gamma_{\partial S_r} > t) = \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} \left[\int_{|y| \leqslant r} \mathrm{e}^{-|y|^2/2t} \mathrm{d}y + \int_{|y| > r} \mathrm{e}^{-|y|^2/2t} \left| \frac{r}{y} \right|^{n-2} \mathrm{d}y \right]$$

$$= \frac{G}{(2\pi t)^{n/2}} \left[\int_0^r a^{n-1} \mathrm{e}^{-a^2/2t} \mathrm{d}a + r^{n-2} \int_r^\infty a \mathrm{e}^{-a^2/2t} \mathrm{d}a \right]$$

---

* 本篇的原始论文投寄编辑部后，K. L. Chung 教授告诉作者，此定理也被 R. K. Getoor 教授不久前独立得到(见[6]).

$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{r^2/2t} v^{\frac{n}{2}-1} e^{-v} dv$$

$$+ \frac{r^{n-2}}{(2t)^{(n/2)-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-r^2/2t}, \qquad (2.2)$$

其中 $G = 2\pi^{n/2} \Big/ \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$. 故

$$\frac{d}{dt} P_0(\gamma_{\partial s_r} > t) = \frac{-r^{n-2}}{2^{(n/2)-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)} t^{-n/2} e^{-r^2/2t}.$$

由此即得(2.1)式. ∎

简写 $\gamma \equiv \gamma_{\partial s_r}$.

定理 2.2 对 $n(\geqslant 3)$ 维布朗运动,当且只当 $m < \frac{n}{2} - 1$ 时,m 级矩 $E_0(\gamma^m) < \infty$;而且

$$E_0(\gamma^m) = r^{2m}/(n-4)(n-6)\cdots(n-2m-2)$$
$$(n > 4). \qquad (2.3)$$

证 由(2.1)式,得

$$E_0(\gamma^m) = \frac{r^{n-2}}{2^{(n/2)-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)} \int_0^\infty s^{m-\frac{n}{2}} e^{-r^2/2s} ds$$

$$= \frac{r^{2m}}{2^m \Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)} \int_0^\infty u^{\frac{n}{2}-m-2} e^{-u} du.$$

后一积分当且只当 $\frac{n}{2} > m + 1$ 时收敛,其值为 $\Gamma\left(\frac{n}{2} - m - 1\right)$. 利用等式

$$\Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right) = \Gamma\left(\frac{n}{2} - m - 1\right) \prod_{i=1}^{m} \left(\frac{n}{2} - i - 1\right),$$

即得(2.3)式. ∎

为了强调空间的维数 n,记 γ 为 $\gamma(n)$,记 ∂S_r 的首中时 $T_{\partial s_r}$ 为 $T(n)$,记 n 维布朗运动在 n 维球 S_r 中的停留时间为:

$$J(n) = \int_0^\infty \chi_{s_r}(X_t) dt,$$

其中 $\chi_A(x)=1$,如 $x\in A$;否则为 0.

系 2.1

$$E_0[T(n)]=E_0[J(n+2)]$$
$$=E_0[\gamma(n+4)]=\frac{r^2}{n}\quad(n\geqslant 1).\qquad(2.4)$$

证

$$E_0[J(n)]=E_0\left[\int_0^\infty\chi_{S_r}(X_t)\mathrm{d}t\right]$$
$$=\int_0^\infty\frac{1}{(2\pi t)^{n/2}}\int_{|y|\leqslant r}\mathrm{e}^{-|y|^2/2t}\mathrm{d}y\mathrm{d}t$$
$$=K\int_{|y|\leqslant r}\frac{\mathrm{d}y}{|y|^{n-2}}=K\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}\int_0^r a\mathrm{d}a=\frac{r^2}{n-2},$$

故

$$E_0[J(n+2)]=\frac{r^2}{n}.$$

在文献[4]中已证明:"若 $X(0)=0$,则 $T(n)$ 与 $J(n+2)$ 同分布",故

$$E_0[T(n)]=\frac{r^2}{n}.$$

最后,由(2.3)式得

$$E_0[\gamma(n+4)]=\frac{r^2}{n}.$$ ∎

上面的系表明:维数越高,则布朗运动粒子越迅速离开球 S_r,其加速程度可由(2.4)式想象.

17.3 极大游程

仍考虑 n 维布朗运动,$\gamma:=\gamma_{\partial S_r}$. 定义

$$M_r=\max_{0\leqslant t\leqslant r}|X_t|,$$

M_r 是在未遇球面 ∂S_r 前布朗运动粒子所走的极大游程,即与原点的最大距离. 以下需指明球的半径,故记 $\gamma:=\gamma_r:=\gamma_{\partial S_r}$,$T_r:=$

$T_{\partial S_r}$,它们分别是 ∂S_r 之末遇与首中时.

定理 3.1 对 x,$|x| \leqslant r$,有

$$P_x(M_r \leqslant a) = \begin{cases} 0, & \text{如 } a \leqslant r; \\ 1 - \left(\dfrac{r}{a}\right)^{n-2}, & \text{如 } a > r. \end{cases} \tag{3.1}$$

证 先设 $a > r$. 利用(1.13)′ 式,得

$$\begin{aligned} P_x(M_r \geqslant a) &= P_x(T_a < \gamma_r < \infty) \\ &= \int_{\partial S_a} P_x(X(T_a) \in \mathrm{d}b) P_b(0 < \gamma_r < \infty) \\ &= \int_{\partial S_a} P_x(X(T_a) \in \mathrm{d}b) L_{\partial S_r}(b, \partial S_r) \\ &= \int_{\partial S_a} P_x(X(T_a) \in \mathrm{d}b) \left(\frac{r}{a}\right)^{n-2} \\ &= \left(\frac{r}{a}\right)^{n-2} \int_{\partial S_a} P_x(X(T_a) \in \mathrm{d}b) = \left(\frac{r}{a}\right)^{n-2}, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} P_x(M_r > a) &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} P_x(M_r \geqslant a + \varepsilon) \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\frac{r}{a + \varepsilon}\right)^{n-2} = \left(\frac{r}{a}\right)^{n-2}. \end{aligned}$$

即得(3.1)式中第二结论.

再设 $a < r$. 由 M_r 之定义,显然有 $P_x(M_r \leqslant a) = 0$. 最后设 $a = r$. 由已证明的二个结果得

$$\begin{aligned} P_x(M_r = r) &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} P_x(r - \varepsilon < M_r \leqslant r + \varepsilon) \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} [P_x(M_r \leqslant r + \varepsilon) - P_x(M_r \leqslant r - \varepsilon)] \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left[1 - \left(\frac{r}{r + \varepsilon}\right)^{n-2} - 0\right] = 0, \end{aligned}$$

故

$$P_x(M_r \leqslant r) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} P_x(M_r \leqslant r - \varepsilon) + P_x(M_r = r) = 0.$$

∎

由(3.1)式可见 $P_x(M_r \leqslant a)$ 不依赖于 x,$|x| \leqslant r$. 它有密度为:

$$g_r(a) = \begin{cases} 0, & \text{如 } a \leqslant r, \\ (n-2)r^{n-2}/a^{n-1}, & \text{如 } a > r. \end{cases} \tag{3.2}$$

其 m 级矩为：

$$E_x(M_r^m) = (n-2)r^{n-2}\int_r^{\infty} a^m a^{1-n}\mathrm{d}a$$

$$= \begin{cases} \infty, & \text{如 } m \geqslant n-2, |x| \leqslant r; \\ \dfrac{n-2}{n-m-2}r^m, & \text{如 } m < n-2, |x| \leqslant r. \end{cases} \tag{3.3}$$

今引入二个特征数

$$C_\gamma = \max(\text{整数 } m \geqslant 0, E_0(r_r^m) < \infty), \tag{3.4}$$

$$C_M = \max(\text{整数 } m \geqslant 0, E_0(M_r^m) < \infty). \tag{3.5}$$

由(2. 3)及(3. 3)式，可见它们依赖于空间的维数 n，但不依赖于球的半径 $r>0$；还有下表

n	3	4	5	6	7	8	9	10	…	$2k-1$	$2k$
C_r	0	0	1	1	2	2	3	3	…	$k-2$	$k-2$
C_M	0	1	2	3	4	5	6	7	…	$2k-4$	$2k-3$

这表示：$2k-1$ 与 $2k$ 维布朗运动，虽然有相同的 $C_\gamma=k-2$，却有不同的 C_M，分别为 $2k-4$ 与 $2k-3$. 因此，各维布朗运动有各自的 (C_γ, C_M).

由(3. 3)式得 M_r 的数学期望与方差为：当 $|x|\leqslant r$ 时，

$$E_x(M_r) = \frac{n-2}{n-3}r, \quad D_x(M_r) = \frac{n-2}{(n-3)^2(n-4)}r^2. \tag{3.6}$$

引进 M_r 的修正化变量 N_r：

$$N_r = \frac{M_r - r}{\sqrt{D_x M_r}} \qquad (n > 4), \tag{3.7}$$

N_r 依赖于 n.

定理 3.2 当 $|x| \leqslant r$ 时，

$$\lim_{n\to\infty} P_x(N_r \leqslant a) = \begin{cases} 0, & \text{如 } a \leqslant 0, \\ 1 - \mathrm{e}^{-a}, & \text{如 } a > 0. \end{cases} \tag{3.8}$$

证

$$P_x(N_r > a) = P_x\left\{\frac{M_r - r}{\frac{r}{n-3}\sqrt{\frac{n-2}{n-4}}} > a\right\}$$

$$= P_x\left\{M_r > \frac{ar}{n-3}\sqrt{\frac{n-2}{n-4}} + r\right\}.$$

由定理 3.1，当$\frac{ar}{n-3}\sqrt{\frac{n-2}{n-4}} + r \leqslant r$ 时，亦即当 $a \leqslant 0$ 时，有 $P_x(N_r > a) = 1$. 由此得(3.8)式中第一结论. 当$a > 0$时，仍由定理 3.1，

$$P_x(N_r > a) = \left[r\Big/\left(\frac{ar}{n-3}\sqrt{\frac{n-2}{n-4}} + r\right)\right]^{n-2}$$

$$= 1\Big/\left[1 + \frac{a}{n-3}\sqrt{\frac{n-2}{n-4}}\right]^{n-3}\left(1 + \frac{a}{n-3}\sqrt{\frac{n-2}{n-4}}\right).$$

$$\to e^{-a} \quad (n \to \infty).$$

∎

17.4 首达极大时

定义首达极大 M_r 的时间为 α_r：

$$\alpha_r = \min_t(|X_t| = M_r, t \leqslant \gamma_r), \tag{4.1}$$

回忆 $\gamma_r \equiv \gamma_{\partial s_r}, T_r \equiv T_{\partial s_r}$. 文献[4]中已证明：

$$P_0(T_r > t) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_{ni} \exp\left(-\frac{q_{ni}^2}{2r^2}t\right), \tag{4.2}$$

其中 q_{ni} 是 Bessel 函数 $J_v(z)\left(v = \frac{n}{2} - 1\right)$ 的正零点，又

$$\xi_{ni} = q_{ni}^{v-1}/2^{v-1}\Gamma(v+1)J_{v+1}(q_{ni}).$$

定理 4.1

$$P_0(\alpha_r > t) = (n-2)r^{n-2}\sum_{i=1}^{\infty}\xi_{ni}\int_r^{\infty}\frac{1}{a^{n-1}}e^{-q_{ni}^2 t/2a^2}da. \tag{4.3}$$

证 关键在于把 α_r 看成首中随机球面 ∂S_{M_r} 的时间，即 $\alpha_r = T_{M_r}$. 于是由此及(3.2)式得

$$\begin{aligned} P_0(\alpha_r > t) &= P_0(T_{M_r} > t) \\ &= \int_r^{\infty} P_0(T_a > t) P_0(M_r \in \mathrm{d}a) \\ &= \int_r^{\infty} P_0(T_a > t) \frac{(n-2)r^{n-2}}{a^{n-1}} \mathrm{d}a, \end{aligned} \tag{4.4}$$

再以(4.2)式代入，即得(4.3). ∎

系 4.1 $E_0\alpha_r = \dfrac{n-2}{n(n-4)} r^2 \quad (n > 4)$.

证 利用(4.4)式，有

$$\begin{aligned} E_0\alpha_r &= \int_0^{\infty} P_0(\alpha_r > t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} P_0(T_a > t)\mathrm{d}t\right] \frac{(n-2)r^{n-2}}{a^{n-1}} \mathrm{d}a, \end{aligned}$$

但由(2.4)式

$$\int_0^{\infty} P_0(T_a > t)\mathrm{d}t = E_0(T_a) = \frac{a^2}{n},$$

将此式代入上式，即得

$$E_0\alpha_r = \frac{(n-2)r^{n-2}}{n} \int_r^{\infty} \frac{\mathrm{d}a}{a^{n-3}} = \frac{n-2}{n(n-4)} r^2. \quad ∎$$

于是对同一 n，同一半径 r，得

$$E_0T_r = \frac{r^2}{n} < E_0J_r = \frac{r^2}{n-2} < E_0\alpha_r = \frac{(n-2)r^2}{n(n-4)} < E_0\gamma_r = \frac{r^2}{n-4}$$

(J_r 为在球 S_r 中的停留时间)，其中 $E_0J_r < E_0\alpha_r$ 不是直观上明显的.

参 考 文 献

[1] Chung K L. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 1973, 23(3): 313～322

[2] Port S C., Stone C J. Proceeding of the sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and probability, 1972, 3: 143～176

[3] Дынкин Е. Б. Марковские процессы. Москва: Госуд. издат. физмат. Литер.

1963.(英译本见第4篇的文献[6])
[4] Ciesielski Z., Taylar S J. Trans. Amer. Math. Soc., 1962, 103: 434～450
[5] 王梓坤. 科学通报, 1980, 25(8): 383
[6] Getoor R K. The Annals of Probability, 1979, 7(5): 864～867

第 18 篇　布朗运动首中与末离的联合分布

18.1　首中时、首中点、末离时与末离点

设 $X=\{x(t,\omega),t\geqslant 0\}$ 为定义在概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上取值于 d $(\geqslant 3)$ 维欧氏空间 R^d 中的标准布朗运动，$\mathscr{B}^d$ 为 R^d 中 Borel σ-代数，X 的转移概率密度为

$$p(t,x,y)=(2\pi t)^{-d/2}\exp(-|x-y|^2/2t);$$

转移算子半群为 $\{T_t,t\geqslant 0\}$，$T_tf(x)=\int p(t,x,y)f(y)\mathrm{d}y$，$f$ 为有界 $\mathscr{B}^d$ 可测函数，$\int=\int_{R^d}$；Green 函数为 $g(x,y)=\int_0^\infty p(t,x,y)\mathrm{d}t$；相对紧集 $B\subset R^d$ 的平衡测度记为 μ_B.

对 $B\in\mathscr{B}^d$，定义 X 关于 B 的首中时与末离时分别为

$$h_B=\inf(t>0,x_t\in B),\ l_B=\sup(t>0,x_t\in B),$$

其中 $x_t=x(t,\omega)$，并约定空集 $\varnothing$ 的 $\inf(\varnothing)=\infty$，$\sup(\varnothing)=0$. 令 $B^c=R^d\backslash B$. 称 $e_B=h_{B^c}$ 为 B 的首出时. 显然，如 $l_B>0$，则必 $l_B\geqslant h_B$，又 $l_B\geqslant e_B$，此因 $\forall\ \epsilon>0,x(l_B+\epsilon)\in B^c$，故 $l_B+\epsilon\geqslant e_B$.

B 的首中点、末离点、首出点分别记为 $x(h_B)$，$x(l_B)$，$x(e_B)$. 由于 $d\geqslant 3$，X 为暂留，即

$$P_x(\lim_{t\to\infty}|x_t| = \infty) = 1, \forall\, x \in R^d, \tag{1.1}$$

故如 B 有界，则$\forall\, x\in B$，P_x-a.s. 有 $e_B<\infty$，$l_B>0$.

关于 $(h_B, x(h_B))$ 的分布的研究见文献[1～3]，对$(l_B, x(l_B))$ 的研究见文献[1,3,4—6]，对流型上布朗运动的首出概率见文献[7]. 本篇的目的是研究 $h_B, x(h_B), l_B, x(l_B)$ 四者的联合分布及极限分布，在一些情况下可求出数学表达式；特别，如 $x_0=0$，球心在 O 半径为 $r>0$ 的球 B_r 的球面 S_r 的首中点与末离点的分布是球面对称的，其联合密度与条件密度有相同的表达式；当 $d\to\infty$ 时，我们会看到无穷维空间中一种新的函数（类似但非 Dirac 函数）.

设 $D\in\mathscr{B}^d$，以 $P_D(t,x,A)$ 表示 D 上的（次）转移概率，即

$$\begin{aligned}P_D(t,x,A) :&= P_x(e_D > t, x_t \in A)\\ &= P_x(x_u \in D, u \leqslant t, x_t \in A), x \in D.\end{aligned}$$

当 $x \overline{\in} D$ 时，它等于 0. 又记 $T_t^D f(x) := \int_D P_D(t,x,\mathrm{d}y)f(y)$.

18.2 联合分布

固定 $B\in\mathscr{B}^d$，无混淆时，略去 B 而简写 h_B 为 h 等等. 记

$$H(z,C) = P_z(x(h) \in C),$$
$$E(z,C) = P_z(x(e) \in C),$$
$$L(z,C) = P_z(l > 0, x(l) \in C).$$

$x(\infty)$ 无定义，故约定$(x(h) \in C) = (h < \infty, x(h) \in C)$；对 e, l 也如此.

定理 2.1 设 $B\in\mathscr{B}^d$，$\forall\, x\in R^d$，$s>0$，$t>0$，有

$$P_x(h > s, x(h) \in A, l - h > t, x(l) \in C)$$
$$= \int_A P_y(l > t, x(l) \in C)P_x(h > s, x(h) \in \mathrm{d}y) \tag{2.1}$$
$$= \int_A T_t L(y,C) \cdot T_s^{B^c} H(x,\mathrm{d}y). \tag{2.2}$$

证 以 $\mathscr{F}_h$ 表示停时 h 前 σ 代数，θ_t 表示 X 的推移算子，由强马尔可夫性，(2.1) 式之左方等于

$$P_x(h>s,\ x(h)\in A,\ \theta_h l>t,\ x(l)\in C)$$
$$=\int_{(h>s,\ x(h)\in A)}P_x(\theta_h l>t,\ x(l)\in C|\mathscr{F}_h)P_x(\mathrm{d}\omega)$$
$$=\int_{(h>s,\ x(h)\in A)}P_{x(h)}(l>t,\ x(l)\in C)P_x(\mathrm{d}\omega)$$
$$=\int_A P_y(l>t,\ x(l)\in C)P_x(h>s,\ x(h)\in \mathrm{d}y).$$

然而

$$P_y(l>t,\ x(l)\in C)=\int p(t,y,z)L(z,C)\mathrm{d}z$$
$$=T_tL(y,C), \tag{2.3}$$

$$P_x(h>s,x(h)\in G)=P_x(x_u\overline{\in}B,u\leqslant s,x(h)\in G)$$
$$=\int_{(x_u\overline{\in}B,u\leqslant s)}P_x(x(h)\in G|\mathscr{F}_s)P_x(\mathrm{d}\omega)$$
$$=\int_{(x_u\overline{\in}B,u\leqslant s)}P_{x(s)}(x(h)\in G)P_x(\mathrm{d}\omega)$$
$$=\int_{B^c}P_z(x(h)\in G)P_x(x_u\overline{\in}B,u\leqslant s,x(s)\in \mathrm{d}z)$$
$$=\int_{B^c}H(z,G)P_{B^c}(s,x,\mathrm{d}z)=T_S^{B^c}H(x,G). \tag{2.4}$$

以(2.3)、(2.4) 式代入(2.1) 式即得(2.2) 式. 如 $x\in B$,(2.1) 式左右方及(2.2) 式皆为 0 而定理自动成立. ∎

由于 $e_B=h_{B^c}$,又当 $l_B>0$ 时,$l_B\geqslant e_B$,故有

定理 2.1′ 设 $B\in\mathscr{B}^d$，$e=e_B$，$l=l_B$，$\forall\ x\in R^d$，$s>0$，$t>0$，有

$$P_x(e>s,\ x(e)\in A,l-e>t,\ x(l)\in C)$$
$$=\int_A P_y(l>t,x(l)\in C)P_x(e>s,\ x(e)\in \mathrm{d}y) \tag{2.5}$$
$$=\int_A T_tL(y,C)\cdot T_S^B E(x,\mathrm{d}y). \tag{2.6}$$

注 2.1 上述证明中未用到布朗运动的特性，故上二定理对相当一般的连续强马尔可夫过程也成立.

设 $B\in\mathscr{B}^d$ 为有界非空开集. 固定 $s>0$, $P_x(e>s,\ x_s\in \mathrm{d}y)$ 关于 Lebesgue 测度有密度为 $p_B(s,x,y)$, 而且

$$p_B(s,x,y)=\sum_n \mathrm{e}^{-\lambda_n s}\varphi_n(x)\varphi_n(y), \tag{2.7}$$

其中 $\varphi_n(x)(x\in B)$ 为 $\frac{1}{2}\Delta=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ 在 B 上对应于特征值 λ_n 的特征函数;(2.7) 式中级数绝对收敛,在 $B\times B$ 上一致收敛(文献[3]),这使以下极限交换为合理.

简记

$$T(t,y,z)=\int_t^\infty p(u,y,z)\mathrm{d}u.$$

定理 2.2 设 B 为有界非空开集, $\forall\ x\in B$, $s>0$, $t>0$ 有

$$P_x(e>s,\ x(e)\in A,\ l-e>t,\ x(l)\in C)$$

$$=\sum_n \mathrm{e}^{-\lambda_n s}\varphi_n(x)\int_{z\in C}\int_{y\in A}\int_{v\in B}\varphi_n(v)E(v,\mathrm{d}y)\mathrm{d}vT(t,y,z)\mu_B(\mathrm{d}z). \tag{2.8}$$

证 $P_x(e>s,x(e)\in A)=\int_B E(v,A)P_B(s,x,\mathrm{d}v)$

$$=\int_B E(v,A)\sum_n \mathrm{e}^{-\lambda_n s}\varphi_n(x)\varphi_n(v)\mathrm{d}v$$

$$=\sum_n \mathrm{e}^{-\lambda_n s}\varphi_n(x)\int_B\varphi_n(v)E(v,A)\mathrm{d}v. \tag{2.9}$$

其次,由文献[1]有

$$P_y(l>t,x(l)\in C)$$

$$=\int p(t,y,z)P_z(l>0,x(l)\in C)\mathrm{d}z$$

$$=\int p(t,y,z)\int_C g(z,a)\mu_B(\mathrm{d}a)\mathrm{d}z$$

$$=\int p(t,z,z)\int_C\left(\int_0^\infty p(u,z,a)\mathrm{d}u\right)\mu_B(\mathrm{d}a)\mathrm{d}z$$

$$=\int_C\int_0^\infty p(t+u,y,a)\mathrm{d}u\mu_B(\mathrm{d}a)$$

$$=\int_C T(t,y,a)\mu_B(\mathrm{d}a). \tag{2.10}$$

以(2.9)、(2.10) 式代入(2.5) 式即得(2.8) 式. ∎

记

$$R(t) = (2\pi)^{d/2}\left(\frac{d}{2} - 1\right)t^{d/2-1}.$$

定理 2.3 对有界集 $B \in \mathscr{B}^d$,紧集 A,有

$$R(s)R(t)P_x(h > s, x(h) \in A, l - h > t, x(l) \in C)$$

$$\to \mu_B(A)\mu_B(C)P_x(h = \infty), \ (t \to \infty, s \to \infty). \quad (2.11)$$

$$\to \mu_B(A)\mu_B(C), \ (|x| \to \infty). \quad (2.12)$$

证 由定理 2.1,(2.11) 式左方为

$$\int_A R(t)P_y(l > t, x(l) \in C)R(s)P_x(h > s, x(h) \in \mathrm{d}y), \quad (2.13)$$

在紧集 A 上,关于 y 一致地有[3]

$$\lim_{t\to\infty} R(t)P_y(l > t, x(l) \in C) = \mu_B(C),$$

从而当 $t \to \infty$ 时,(2.13) 式收敛于 $\mu_B(C)R(S)P_x(h > s, x(h) \in A)$. 再令 $s \to \infty$,后者趋于

$$P_x(h_B = \infty)\mu_B(A)\mu_B(C).$$

取 r 充分大,使球 $B_r \supset B$,当 $|x| > r$ 时有

$$1 - \left|\frac{r}{x}\right|^{d-2} = P_x(h_{B_r} = \infty) \leqslant P_x(h_B = \infty),$$

于是 $\lim\limits_{|x|\to\infty} P_x(h_B = \infty) = 1$. (2.12) 式得证. ∎

18.3 球面情形

当 B 为球 B_r 或球面 S_r 时,可得到一些有趣的结果. S_r 的首中时与末离时分别记为 h_r 与 l_r, B_r 的首出时记为 e_r. 记 S_r 上的均匀分布为 U_r. 由文献 [4]

$$H_r(y, D) = P_y(x(h_r) \in D)$$

$$= \int_D \frac{r^{d-2}\left||y|^2 - r^2\right|}{|y - z|^d} U_r(\mathrm{d}z), \quad (3.1)$$

$$L_r(y, D) = P_y(l_r > 0, x(l_r) \in D)$$

$$= \int_D \left| \frac{r}{y-z} \right|^{d-2} U_r(\mathrm{d}z), \tag{3.2}$$

$$T_t L_r(y,D) = P_y(l_r > t,\ x(l_r) \in D)$$

$$= (2\pi t)^{-d/2} \int \exp\left(-\frac{|y-u|^2}{2t} \right) \int_D \left| \frac{r}{u-z} \right|^{d-2} U_r(\mathrm{d}z)\mathrm{d}u, \tag{3.3}$$

B_r 及 S_r 上的平衡测度相同为

$$\mu_r(\mathrm{d}z) = 2\pi^{d/2} r^{d-2} U_r(\mathrm{d}z) / \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1 \right). \tag{3.4}$$

简记

$$K(d,r) := 2\pi^{d/2} r^{2d-4} / \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1 \right),$$

$$\Phi_n(y,r) := \int_{B_r} \varphi_n(v) \frac{\left| |v|^2 - r^2 \right|}{|v-y|^d} \mathrm{d}v,$$

其中 φ_n 为 $\frac{1}{2}\Delta$ 在开球 B_r 上对应于特征值 λ_n 的特征函数. 当 $x_0 \in B_r$ 时, $h_r = e_r$, 故 e_r 的分布 $E_r(v,D)$ 重合于 $H_r(v,D)$, $v \in B_r$. 以此及 (3.1), (3.4) 式代入 (2.8) 式, 得

定理 3.1 设 B_r 为开球, 则 $\forall\ x \in B_r, s > 0, t > 0, A \subset S_r$, $C \subset S_r$, 有

$$P_x(h_r > s,\ x(h_r) \in A,\ l_r - h_r > t,\ x(l_r) \in C)$$

$$= K(d,r) \sum_n \mathrm{e}^{-\lambda_n s} \varphi_n(x) \int_{z \in C} \int_{y \in A} \Phi_n(y,r) T(t,y,z) U_r(\mathrm{d}y) U_r(\mathrm{d}z), \tag{3.4}$$

记

$$Q(d,r,s) := \sum_{i=1}^{\infty} \xi_{di} \exp(-q_{di}^2 s / 2r^2),$$

其中 q_{di} 是 Bessel 函数 $J_v(z)$ $(v = \frac{d}{2} - 1)$ 的正零点, 又

$$\xi_{di} = q_{di}^{v-1} / 2^{v-1} \Gamma(v+1) J_{v+1}(q_{di}),$$

在 P_0 下, h_r 与 $x(h_r)$ 独立; $x(h_r)$ 在 S_r 上有均匀分布 U_r; 又由文献 [2], $P_0(h_r > s) = Q(d,r,s)$. 故由 (2.1) 式得

系 3.1

$$
\begin{aligned}
&P_0(h_r > s, x(h_r) \in A, l_r - h_r > t, x(l_r) \in C) \\
&\quad = Q(d,r,s)\int_A T_t L_r(y,C) U_r(\mathrm{d}y).
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

由强马尔可夫性及(3.1)、(3.2)式,容易证明

定理 3.2 $\forall x \in B_r, A \subset S_r, C \subset S_r$,有

$$
\begin{aligned}
&P_x(x(h_r) \in A,\ x(l_r) \in C) \\
&= \int_A P_y(x(l_r) \in C) P_x(x(h_r) \in \mathrm{d}y) \\
&= \int_A\int_C \frac{r^{2d-4}\left||x|^2 - r^2\right|}{|y-x|^d |y-z|^{d-2}} U_r(\mathrm{d}y) U_r(\mathrm{d}z).
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

系 3.2

$$
\begin{aligned}
&P_0(x(h_r) \in A, x(l_r) \in C) \\
&= \int_A\int_C \left|\frac{r}{y-z}\right|^{d-2} U_r(\mathrm{d}y) U_r(\mathrm{d}z) \\
&= P_0(x(h_r) \in C, x(l_r) \in A).
\end{aligned}
$$

由系 3.2 知,在 P_0 下,$x(h_r)$ 与 $x(l_r)$ 在分布意义下是球面对称的,即:自 0 出发的布朗运动,关于 S_r,“在 A 首中,从 C 末离”与“在 C 首中,从 A 末离”有相同的概率. 再者,$x(h_r)$ 与 $x(l_r)$ 的联合分布关于 $U_r \times U_r$ 有联合密度为

$$
f(y,z) = \left|\frac{r}{y-z}\right|^{d-2} \quad (y \in S_r, z \in S_r). \tag{3.7}
$$

今求当 $x(h_r) = y \in S_r$ 固定时,$x(l_r)$ 关于 U_r 的条件分布密度 $f_l(z|y)$. 利用已知结果

$$
\begin{aligned}
\int_{S_r} \left|\frac{r}{y-z}\right|^{d-2} U_r(\mathrm{d}z) &= P_y(h_r < \infty) \\
&= \begin{cases} 1, & \text{如 } |y| \leqslant r, \\ |r/y|^{d-2}, & \text{如 } |y| > r \end{cases}
\end{aligned}
$$

得

$$
\begin{aligned}
f_l(z|y) &= \left|\frac{r}{y-z}\right|^{d-2} \Big/ \int_{S_r} \left|\frac{r}{y-z}\right|^{d-2} U_r(\mathrm{d}z) \\
&= \left|\frac{r}{y-z}\right|^{d-2} \quad (z \in S_r).
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

由对称性,当 $x(h_r) = z \in S_r$ 固定时,$x(h_r)$ 关于 U_r 的条件分布密

度为

$$f_h(y|z) = \left|\frac{r}{y-z}\right|^{d-2} \quad (y \in S_r). \tag{3.9}$$

于是我们看到 $\left|\frac{r}{y-z}\right|^{d-2}$ 的四种概率意义，分别见(3.2)、(3.7)、(3.8)、(3.9) 式，尽管 y,z 在各种情况下起着不同的作用.

现在来看，当空间维数 $d\to\infty$时会出现什么新情况. 为了强调 d，在各记号中标明 d，如写 S_r 为 S_r^d. 改写 (3.7) 式为

$$f_d(y,z) = \left|\frac{r}{y-z}\right|^{d-2} \quad (y \in S_r^d, z \in S_r^d). \tag{3.7$'$}$$

直观上，当 d 增大时，如 $|y-z| \equiv c < r$，则 $f_d(y,z)$ 单增到 ∞，这表明 $x(h_r)$、$x(l_r)$ 在 S_r^d 上以很大概率越来越靠拢；如 $|y-z| \equiv c' > r$，则 $f_d(y,z)$ 单减到 0，从而 $|x(h_r)-x(l_r)| > r$ 的概率越来越小. 于是引导出下列极限函数：

$$F(y,z) = \begin{cases} \infty, & \text{如 } |y-z| < r; \\ 1, & \text{如 } |y-z| = r; \\ 0, & \text{如 } |y-z| > r. \end{cases}$$

其中 $F(y,z)$ 是定义在 $S_r^\infty \times S_r^\infty$ 上的“函数”，而 S_r^∞ 是无穷维空间 l_2 中的球面，半径为 r：

$$l_2 = \{y: y = (y_1, y_2, \cdots), |y|^2 = \sum_i y_i^2 < \infty\},$$

$$S_r^\infty = \{y: y \in l_2, |y| = r\},$$

$F(y,z)$ 是一类新的“函数”，它类似于（但不是）Dirac 函数，也许它会引起人们的兴趣.

参考文献

[1] Chung K. L. Lectures from Markov processes to Brownian Motion. Berlin:Springer-Verlag,1982.

[2] Ciesielski Z., Taylar S J. Trans. Amer. Math. Soc., 1962, 103: 434～450

[3] Port S. C., Stone C. J. Brownian Motion and Classical Potential Theo-

ry. New York:Academic Press,1978.

[4] 王梓坤.中国科学,1980,(10):933～940

[5] 吴荣.科学通报,1984,29(11):647～650

[6] 周性伟,吴荣.中国科学,A辑,1983,(2):128～133

[7] Darling R W R. Probability Theory and Related Fields. 1992,93(2):137～152

第19篇 对称稳定过程与布朗运动的随机波

19.1 随机首波与随机末波

在文献［1］中已经研究过布朗运动的一种特殊的随机波，不过那里没有提出随机波的一般概念．对连续强马氏过程，随机（首）波的概念是由 Dynkin 与 Vanderbei 提出来的，并应用于联系多个马氏过程的调和函数的研究中，他们的论文当时尚待发表．本篇将随机波的概念扩展到右连续强马氏过程上；除首波外，并定义了随机末波，以使随机波的概念更为完整；此外，还对两类过程，即对称稳定过程与布朗运动，求出了首波与末波的分布以及此二波到达时差的分布．如所周知，可分对称稳定过程的轨道是右连续的，且有左极限．

设 $X=\{x_t(\omega),t\geqslant 0\}$ 为右连续、强马氏过程，取值于 d 维欧氏可测空间 $(R^d,\mathscr{B}^d)$，$\mathscr{B}^d$ 为 R^d 中 Borel σ-代数．又设 $\varphi(s)(s\geqslant 0)$ 为严格增加的连续函数，$\varphi(0)=0$．对任意 $r\geqslant 0$，定义

$$h_r^\varphi(\omega)=\inf(t>0,\varphi(|x_t(\omega)|)-\varphi(|x_0(\omega)|)>r),\tag{1.1}$$

这里及以后皆约定 $\inf\varnothing=\infty$．在 $\omega\in(h_r^\varphi<\infty)$ 上，定义

$$W^f(r,\omega)=x(h_r^\varphi,\omega),\tag{1.2}$$

并称过程$\{W^f(r,\omega),r\geqslant 0\}$为$X$的随机首波.

由(1.1)式得

$$h_r^\varphi(\omega)=\inf(t>0,|x_t|>\psi(|x_0|,r)),\tag{1.3}$$

其中

$$\psi(|x_0|,r)=\varphi^{-1}(\varphi(|x_0|)+r\geqslant|x_0|.$$

因而h_r^φ可视为集$\bar{B}_{\psi(|x_0|,r)}(0)$的首出时间,此集是$R^d$中以$O$为中心、以$\psi(|x_0|,r)$为半径的闭球.这一事实可简化以后的几处证明:先证某结论对以r为半径的球(或球面)正确,以$\psi(|x_0|,r)$代替r,即知它对以$\psi(|x_0|,r)$为半径的球(或球面)也正确.

由于X右连续,可见在r固定时首波$W^f(r,\omega)$集中在$(y:|y|\geqslant\psi(|x_0|,r))$上.

特别,如$\varphi(s)=s$,则$\psi(|x_0|,r)=|x_0|+r$.

今进一步假设X的轨道有左极限.对$r>0$,定义

$$l_r^\varphi(\omega)=\sup(t>0,|x_{t-}|<\psi(|x_0|,r)),\tag{1.4}$$

这里及以后皆约定$\sup\varnothing=0$.可视l_r^φ为末遇开球$B_{\psi(|x_0|,r)}(0)$的时间.在$(\omega:l_r^\varphi>0)$上,定义

$$W^l(r,\omega)=x(l_r^\varphi-,\omega),\tag{1.5}$$

称过程$\{W^l(r,\omega),r>0\}$为X的随机末波.在r处,末波$W^l(r,\omega)$集中在

$$(y:|y|\leqslant\psi(|x_0|,r))$$

上.

特别,如X的轨道连续,则$W^f(r,\omega)$与$W^l(r,\omega)$皆集中在球面$(y:|y|=\psi(|x_0|,r))$上.当r上升时,此球的半径增大,从而W^f与W^l向外扩展而呈波形,但在球面上的位置则是随机的,故可形象地称它们为随机波.

代替(1.1)式,也可考虑

$$\bar{h}_r^\varphi(\omega)=\inf(t>0,\varphi(|x_t-x_0|)>r),$$

等等,但本篇不深究.

19.2 对称稳定过程的随机波

设 X 为 R^d 中对称稳定过程，指标为 α，$0<\alpha<2$；亦即 X 为具有平稳、独立增量的过程，增量 $x_{s+t}-x_s$ 的特征函数为：

$$E\exp[i\xi(x_{s+t}-x_s)]=\exp(-t|\xi|^\alpha), \tag{2.1}$$

$\xi\in R^d$. 它是马氏过程，转移概率密度 $p(t,x,y)$ 有界、连续，而且只依赖于 t 与 $y-x$，即

$$p(t,x,y)=p(t,y-x),$$

又 $p(t,x)$ 由下式唯一决定

$$e^{-t|\xi|^\alpha}=\int_{R^d}e^{ix\xi}p(t,x)\mathrm{d}x,$$

取反 Fourier 变换，得

$$p(t,x,y)$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^{d/2}|y-x|^{d/2-1}}\int_0^\infty e^{-t\beta^\alpha}\beta^{d/2}J_{d/2-1}(|y-x|\beta)\mathrm{d}\beta, \tag{2.2}$$

这里 $J_v(x)$ 是指标为 v 为 Bessel 函数（见文献 [2]）.

可设此过程右连续、有左极限，而且是强马氏过程.

由 (2.1) 式知，X 有比例不变性：如 $r>0$，则 $\{x(r^\alpha t)/r,t\geqslant 0\}$ 也是指标为 α 的对称稳定过程，而且对任意 Borel 集 $B\subset R^d$，有

$$P_x(x(t)\in B)=P_{rx}\left(\frac{1}{r}x(r^\alpha t)\in B\right). \tag{2.3}$$

以下假设 $d>\alpha$；这等价于设过程 X 是暂留的(Transient).

令 $rB=(rx:x\in B),r>0$. 以 h_{rB} 表示 rB 的首中时，即

$$h_{rB}(\omega)=\inf(t>0,x_t(\omega)\in rB), \tag{2.4}$$

集 rB 的首中点 $x(h_{rB})$ 的分布记为：

$$H_{rB}(x,\mathrm{d}y)=P_x(x(h_{rB})\in\mathrm{d}y).$$

记 $h_B=h_{1B}$，$H_B=H_{1B}$.

引理 2.1 设 $H_B(x,\mathrm{d}y)$关于 d 维 Lebesgue 测度，有密度为

$f(x,y)$，则 $H_{rB}(x,\mathrm{d}y)$ 也有密度 $f_r(x,y)$，而且可取为

$$f_r(x,y)=f\left(\frac{x}{r},\frac{y}{r}\right)\Big/r^d. \tag{2.5}$$

证 由比例不变性，有

$$\delta_B:=\inf(t>0,x(r^\alpha t)/r\in B)$$
$$=\inf(t>0,x(r^\alpha t)\in rB)=h_{rB}/r^\alpha,$$
$$P_{rx}(x(h_{rB})\in rA)=P_{rx}(x(r^\alpha\delta_B)/r\in A)$$
$$=P_x(x(h_B)\in A).$$

取 x 为 x/r，得

$$P_x(x(h_{rB})\in rA)=P_{x/r}(x(h_B)\in A)$$
$$=\int_A f\left(\frac{x}{r},z\right)\mathrm{d}z=\int_{rA}f\left(\frac{x}{r},\frac{y}{r}\right)\frac{\mathrm{d}y}{r^d}.$$

∎

今考虑 B 的末遇时 l_B：

$$l_B(\omega)=\sup(t>0,x_t(\omega)\in B),$$

末遇点 $x(l_B-)$ 之分布记为：

$$L_B(x,\mathrm{d}y):=P_x(l_B>0,x(l_B-)\in\mathrm{d}y).$$

记 X 的 Riesz 势核为 $g(x)$，即

$$g(x)=\int_0^\infty p(t,x)\mathrm{d}t=c_1/|x|^{d-\alpha}, \tag{2.6}$$

$$c_1=\Gamma\left(\frac{d-\alpha}{2}\right)\Big/2^\alpha\pi^{d/2}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right). \tag{2.7}$$

记

$$g(x,y)=g(y-x).$$

下面引理表示：通过首中点分布可以求出末遇点分布．此事实对 $d(\geqslant 3)$ 维布朗运动也成立[1]．

引理 2.2 设 X 为 R^d 中对称稳定过程，$d>\alpha$，又 $B\in\mathscr{B}^d$ 为相对紧集．则对一切 x，在测度的弱收敛意义下，有

$$L_B(x,\mathrm{d}y)=g(x,y)\lim_{|z|\to\infty}\frac{H_B(z,\mathrm{d}y)}{g(z)}. \tag{2.8}$$

证 以 $\mu_B(\mathrm{d}y)$ 表示 B 的平衡测度．由文献[3,4]可知，在弱收敛意义下，有

$$\lim_{|z|\to\infty}\frac{H_B(z,\mathrm{d}y)}{g(z)}=\mu_B(\mathrm{d}y).$$

另方面，由文献[5]

$$\frac{L_B(x,\mathrm{d}y)}{g(x,y)}=\mu_B(\mathrm{d}y).$$

综合二式即得(2.8)式. ∎

定理 2.1　设 X 为对称稳定过程，$d>\alpha$，则从任意点 $x\in R^d$ 出发，随机首波与末波的分布分别为：

$$P_x(W^f(r,\omega)\in A)$$

$$=c_2\int_{A_r}\frac{|\psi^2(|x|,r)-|x|^2|^{\alpha/2}\mathrm{d}y}{|\psi^2(|x|,r)-|y|^2|^{\alpha/2}|x-y|^d},\tag{2.9}$$

$$P_x(W^l(r,\omega)\in A)$$

$$=c_2\int_{A'_r}\frac{\mathrm{d}y}{|\psi^2(|x|,r)-|y|^2|^{\alpha/2}|x-y|^{d-\alpha}},\tag{2.10}$$

其中 $r>0$，$c_2=\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\sin\frac{\pi\alpha}{2}\Big/\pi^{1+d/2}$，又

$$A_r=A\cap(y:|y|\geqslant\psi(|x|,r));$$

$$A'_r=A\cap(y:|y|\leqslant\psi(|x|,r)).$$

证　先考虑半径为 r、中心为 O 的球；最后结果只须以 $\psi(|x|,r)$ 代替 r 即得. 令

$$h_r^{(0)}=\inf(t>0,|x_t|>r),h_r^{(i)}=\inf(t>0,|x_t|<r),$$

则

$$H_r^{(0)}(x,\mathrm{d}y)=P_x(x(h_r^{(0)})\in\mathrm{d}y)\quad 集中在\ |y|\geqslant r\ 上,$$

$$H_r^{(i)}(x,\mathrm{d}y)=P_x(x(h_r^{(i)})\in\mathrm{d}y)\quad 集中在\ |y|\leqslant r\ 上.$$

如 $r=1$，则略去下标 r，故 $h^{(0)}=h_1^{(0)}$ 等等. 文献[6]中已证明：如 $|x|<1$，则关于 d 维 Lebesgue 测度，$H^{(0)}(x,\mathrm{d}y)$ 有密度为：

$$h^{(0)}(x,y)=\frac{c_2|1-|x|^2|^{\alpha/2}}{|1-|y|^2|^{\alpha/2}|x-y|^d},\ |y|\geqslant 1;$$

如 $|x|>1$，则 $H^{(i)}(x,\mathrm{d}y)$ 有密度为：

$$h^{(i)}(x,y)=\frac{c_2|1-|x|^2|^{\alpha/2}}{|1-|y|^2|^{\alpha/2}|x-y|^d},\ |y|\leqslant 1.$$

注意上二式虽然表达式相同，但定义域不同.

由引理 2.1，如 $|x|<r$，则 $H_r^{(0)}(x,\mathrm{d}y)$ 有密度为：

$$\begin{aligned} h_r^{(0)}(x,y) &= h^{(0)}\left(\frac{x}{r},\frac{y}{r}\right)\Big/r^d \\ &= \frac{c_2|r^2-|x|^2|^{\alpha/2}}{|r^2-|y|^2|^{\alpha/2}|x-y|^d}, \quad |y|\geqslant r; \end{aligned} \tag{2.11}$$

如 $|x|>r$，则 $H_r^{(i)}(x,\mathrm{d}y)$ 有密度为：

$$h_r^{(i)}(x,y) = \frac{c_2|r^2-|x|^2|^{\alpha/2}}{|r^2-|y|^2|^{\alpha/2}|x-y|^d}, \quad |y|\leqslant r; \tag{2.12}$$

在(2.11)式中以 $\psi(|x|,r)$ 代替 r，即得证(2.9)式.

下面证(2.10)式. 取(2.8)式中的 $B=B_r:=(y:|y|<r)$，则

$$\begin{aligned} \frac{H_{B_r}(z,\mathrm{d}y)}{g(z)} &= \frac{h_r^{(i)}(z,y)\mathrm{d}y}{g(z)} \\ &= \frac{c_2|r^2-|z|^2|^{\alpha/2}|z|^{d-\alpha}}{c_1|r^2-|y|^2|^{\alpha/2}|z-y|^d}\mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{2.13}$$

今证在测度弱收敛意义下，有

$$\lim_{|z|\to\infty}\frac{H_{B_r}(z,\mathrm{d}y)}{g(z)} = \frac{c_2\mathrm{d}y}{c_1|r^2-|y|^2|^{\alpha/2}}. \tag{2.14}$$

实际上，由 $0<\alpha<2$，得

$$\int_{B_r}\frac{\mathrm{d}y}{|r^2-|y|^2|^{\alpha/2}} = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}\int_0^r\frac{s^{d-1}\mathrm{d}s}{(r^2-s^2)^{\alpha/2}}<\infty. \tag{2.15}$$

设 $f(y)$ 为 B_r 上有界连续函数. $\sup|f(y)|<M$，则

$$\begin{aligned} &\left|\int_{B_r}\frac{H_{B_r}(z,\mathrm{d}y)f(y)}{g(z)}-\int_{B_r}\frac{c_2f(y)\mathrm{d}y}{c_1|r^2-|y|^2|^{\alpha/2}}\right| \\ \leqslant{}& M\left\{\int_{|y|\leqslant r-\delta}\left|\frac{H_{B_r}(z,\mathrm{d}y)}{g(z)}-\frac{c_2\mathrm{d}y}{c_1|r^2-|y|^2|^{\alpha/2}}\right|\right. \\ &\left.+\int_{r-\delta<|y|<r}\frac{H_{B_r}(z,\mathrm{d}y)}{g(z)}+\int_{r-\delta<|y|<r}\frac{c_2\mathrm{d}y}{c_1|r^2-|y|^2|^{\alpha/2}}\right\}, \end{aligned}$$

对任给 $\epsilon>0$，由(2.15)、(2.13)式，可见当 $|z|$ 充分大时，可取 $\delta>0$，使第二及第三个积分皆小于 $\epsilon/3M$. 由控制收敛定理，当 $|z|\to\infty$ 时，第一积分趋于 0，故(2.14)式成立.

回忆 $g(x,y)=c_1/|y-x|^{d-\alpha}$. 由引理 2.2 及(2.14)式，得证对一切 x，$L_{B_r}(x,\mathrm{d}y)$ 有密度为：

$$l_{B_r}(x,y)=c_2/|r^2-|y|^2|^{\alpha/2}|y-x|^{d-\alpha}\quad(|y|\leqslant r), \tag{2.16}$$

以 $\psi(|x|,r)$ 代替(2.16)式中的 r 即得证(2.10)式. ■

由(16)(21)，$\forall\ x,|x|<r$，

$$\begin{aligned}
&P_x(x(h_r)\in A,x(l_r)\in C)\\
&=\int_A P_y(x(l_r)\in C)P_x(x(h_r)\in dy)\\
&=\int_A\left[\int_C\frac{C_2\mathrm{d}z}{|r^2-|z|^2|^{\alpha/2}|z-y|^{d-2}}\right]\cdot\\
&\quad\frac{C_2|r^2-|x|^2|^{\alpha/2}}{|r-|y|^2|^{\alpha/2}|x-y|^d}\mathrm{d}y, C\subset\overline{B}_r(\text{闭}), A=R^d-B_r.
\end{aligned}$$

今求首波与末波的时差 $l_r^\varphi-h_r^\varphi$ 的分布. 以 $h_r^\varphi(x,y)$ 记(2.9)式中的被积函数，即

$$h_r^\varphi(x,y)=\frac{c_2|\psi^2(|x|,r)-|x|^2|^{\alpha/2}}{|\psi^2(|x|,r)-|y|^2|^{\alpha/2}|x-y|^d}.$$

又以 $e_r(z)$ 表示从 z 出发，永不到达球($|x|<r$)内的概率，则由文献[6]，

$$\begin{aligned}
e_r(z)&=P_z(h_r^{(i)}=\infty)\\
&=\begin{cases}c_3\displaystyle\int_0^{|z/r|^2-1}\frac{u^{\alpha/2-1}}{(1+u)^{d/2}}\mathrm{d}u, & \text{如 } |z|\geqslant r,\\ 0\qquad\qquad\qquad\qquad, & \text{如 } |z|<r,\end{cases}
\end{aligned} \tag{2.17}$$

又 $$c_3=\Gamma(d/2)\Big/\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d-\alpha}{2}\right).$$

而 $$1-e_r(z)=P_z(h_r^{(i)}<\infty)\leqslant\left|\frac{r}{z}\right|^{d-\alpha}\text{*}$$

定理 2.2 对一切 x

$$P_x(l_r^\varphi-h_r^\varphi\leqslant t)$$

---

* 见 *Prob. R. Fields*, 1987, 76(3): 257～290.

$$= \int_{|y| \geqslant \psi(|x|,r)} h_r^{\varphi}(x,y) \int_{|z| \geqslant \psi(|x|,r)} p(t,y,z) e_{\psi(|x|,r)}(z) \mathrm{d}z \mathrm{d}y. \tag{2.18}$$

证 仍考虑球 $B_r = (|y| < r)$，并以 l_r 记其末遇时，即 $l_r = \sup(t > 0, |x_{t-}| < r)$，则

$$\begin{aligned} &P_x(l_r - h_r^{(0)} \leqslant t) = P_x(\theta_{h_r^{(0)}} l_r \leqslant t) \\ &= \int_{|y| \geqslant r} P_x(x(h_r^{(0)}) \in \mathrm{d}y) P_y(l_r \leqslant t). \end{aligned} \tag{2.19}$$

其中 θ_t 为 X 的推移算子. 由于在 $|z| < r$ 上，$e_r(z) = 0$，故

$$\begin{aligned} &P_y(l_r \leqslant t) = \int_{R^d} p(t,y,z) e_r(z) \mathrm{d}z \\ &= \int_{|z| \geqslant r} p(t,y,z) e_r(z) \mathrm{d}z. \end{aligned} \tag{2.20}$$

代入(2.19)式，得

$$\begin{aligned} &P_x(l_r - h_r^{(0)} \leqslant t) \\ &= \int_{|y| \geqslant r} P_x(x(h_r^{(0)}) \in \mathrm{d}y) \int_{|z| \geqslant r} p(t,y,z) e_r(z) \mathrm{d}z, \end{aligned} \tag{2.21}$$

以(2.11)式代入，并改 r 为 $\psi(|x|,r)$，即得(2.18)式. ∎

19.3 高维布朗运动的随机波

今研究 $d(\geqslant 3)$ 维布朗运动的随机波. 以 S_a 表示 R^d 中半径为 $a > 0$、中心在 O 的球面；S_a 上的均匀分布记为 $U_a(\mathrm{d}y)$.

定理 3.1 设 X 为 $d(\geqslant 3)$ 维布朗运动，则对任意 $x \in R^d$，$A \in \mathscr{B}^d$，$r > 0$，有

$$\begin{aligned} &P_x(W^f(r,\omega) \in A) \\ &= \int_A \frac{\psi(|x|,r)^{d-2} \, | \, |x|^2 - \psi^2(|x|,r) \, |}{|x-y|^d} U_{\psi(|x|,r)}(\mathrm{d}y), \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$P_x(W^l(r,\omega) \in A) = \int_A \frac{[\psi(|x|,r)]^{d-2}}{|x-y|^{d-2}} U_{\psi(|x|,r)}(\mathrm{d}y), \tag{3.2}$$

$$P_x(l_r^\varphi - h_r^\varphi \leqslant t)$$

$$= \int_{|y| = \varphi(|x|, r)} \frac{\psi(|x|, r)^{d-2} ||x|^2 - \psi^2(|x|, r)|}{|x - y|^d} \cdot$$

$$\int_{|z| \geqslant \psi(|x|, r)} \widetilde{p}(t, y, z) \widetilde{e}_{\psi(|x|, r)}(z) \mathrm{d}z U_{\psi(|x|, r)}(\mathrm{d}y), \qquad (3.3)$$

其中

$$\widetilde{p}(t, y, z) = \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{|z - y|^2}{2t}\right),$$

$$\widetilde{e}_r(z) = \begin{cases} 1 - \left|\dfrac{r}{z}\right|^{d-2}, & |z| \geqslant r, \\ 0, & |z| < r. \end{cases} \qquad (3.4)$$

由于证明与上二定理之证明类似，故只简述如下. 在文献[1]中已知：球面 S_r 的首中点分布与末遇点分布分别为：$r^{d-2} ||x|^2 - r^2| |y - x|^{-d} U_r(\mathrm{d}y)$ 以及 $r^{d-2} |x - y|^{2-d} U_r(\mathrm{d}y)$，其中 x 为运动的出发点. 以 $\psi(|x|, r)$ 代替 r 即得(3.1)、(3.2)式.

如所周知，对 $d(\geqslant 3)$ 维布朗运动，从 x 出发，永不中 S_r 的概率由(3.4)式中的 $\widetilde{e}_r(z)$ 给出. 然后仿定理2.2之证，即得(3.3)式. 附带指出，如在(2.17)式中取 $\alpha = 2$，$e_r(z)$ 亦化为 $\widetilde{e}_r(z)$.

定理 3.2 设 $d > 4$，$\dfrac{d}{2} - 1 > m$，m 为正整数，则对一切 x，

$$E_x[(l_r^\varphi - h_r^\varphi)^m]$$

$$\leqslant [2\psi(|x|, r)]^{2m} / (d - 4)(d - 6) \cdots (d - 2m - 2). \qquad (3.5)$$

证 以 x 为中心、以 r 为半径的球面及闭球分别记为 $S_r(x)$ 及 $\overline{B}_r(x)$. 先考虑 $S_r(0)$ 的首中时 h_r 与末遇时 l_r. 在定理3.2的条件下，已知文献[1]*

$$E_0 l_r^m = r^{2m} / (d - 4)(d - 6) \cdots (d - 2m - 2).$$

自球内定点 x 出发，如球半径增大，则末遇球面的时间也增大. 任取 $x \in \overline{B}_r(0)$，显然有 $\overline{B}_r(0) \subset \overline{B}_{2r}(x)$；故自此 x 出发，末遇 $S_r(0)$ 的时间，不超过末遇 $S_{2r}(x)$ 的时间. 而由空间的齐次性，后

* 见第17篇定理2.2——编者

一时间，与自 0 出发，末遇 $S_{2r}(0)$ 之时间 l_{2r} 同分布. 故得

$$E_x[(l_r - h_r)^m] \leqslant E_x l_r^m \leqslant E_0 l_{2r}^m$$
$$= (2r)^{2m}/(d-4)(d-6)\cdots(d-2m-2). \qquad (3.6)$$

由于对任一点 $x \in R^d$，有 $x \in \overline{B}_{\psi(|x|,r)}(0)$，故以 $\psi(|x|,r)$ 代替(3.6)式右方中的 r 后即得(3.5)式. ∎

参考文献

[1] 王梓坤. 中国科学，1980，(2)：109～117

[2] Bochner S.，Chandrasekaran K C. Fourier Transforms. 1965.

[3] Port S C. Ann. Math. Stat.，1967，38：1021～1026

[4] Port S C. ibid.，1968，39：365～371

[5] Chung K L. Ann. Inst. Fourier，1975，25(3 et 4)：131～138

[6] Blumenthal R M.，Getoor R K.，Ray D B. Trans. Amer. Math. Soc.，1961，99：540～554

[7] Bass R F.，Cranston M. Exit times for symmetric stable processes in R. Ann. Prob. 1983，11(3)：578～588

第20篇 二参数 ORNSTEIN-UHLENBECK过程

20.1 从 OUP_1^1 到 OUP_N^d

设 $W=\{W(a),a\geqslant 0\}$ 为标准布朗运动，$\alpha>0$、$\sigma>0$ 为二常数，X_0 为与 W 独立的随机变数. 周知下列随机微分方程(见[1,3])

$$dX(a)=-\alpha X(a)da+\sigma dW(a), \tag{1.1}$$
$$X(0)=X_0$$

有唯一解

$$X(t)=e^{-\alpha t}\left[X_0+\sigma\int_0^t e^{\alpha a}dW(a)\right]. \tag{1.2}$$

称 $X=\{X(t),t\geqslant 0\}$ 为(单参数、一维)Ornstein-Uhlenbeck 过程，简写为 OUP_1^1 或 OUP，它是布朗运动粒子的速度的数学模型，是齐次马尔可夫过程. * 如果 X_0 是常数，或有正态分布，那么它还是正态过程.

近年来二参数鞅的理论得到了很大的发展(见[2])，但二参数马尔可夫过程的研究很少. 本篇研究二参数 OUP(记为 OUP_2). 之所以要研究这类过程，其原因不仅在于它们本身的意义，而且也

---

* 此处，删除了在本篇的原始论文中与正文无关的一句话.

由于它们可以作为二参数马尔可夫过程一般理论的一个很好的前导.值得注意的是这类过程的"增量"不相互独立,这是与二参数布朗运动不同之处.

我们首先给出 OUP_n^d 的合理定义,然后讨论 OUP_2 的性质,重点放在与单参数情况不同处.然后讨论 OUP_2 的三种马尔可夫性.通常的、宽过去的及强马尔可夫性,此外,还讨论单参数与二参数间的联系.

20.2 定义与基本性质

设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为概率空间,$\omega\in\Omega$,R^n 为 n 维欧几里得空间,$\mathbf{Z}=(z_1\cdots,z_n)\in R^n$;$R_+^n=(\mathbf{Z}:z_1\geqslant 0,\cdots,z_n\geqslant 0)$. R_+^n 中 Lebesgue 测度 L 有穷的 Borel 可测集全体记为 $\mathscr{B}_b^n$. 以 W 表示 R_+^n 上的白噪声,它是定义在 $\mathscr{B}_b^n$ 上的实值、可加、正态随机集函数,而且

$$EW(A)=0,\ EW(A)W(B)=L(A\cap B),\tag{2.1}$$

这里 E 表示数学期望.今对每 $\mathbf{Z}\in R_+^n$,定义

$$W(\mathbf{Z})=W([0,z_1]\times\cdots\times[0,z_n]),$$

并称 $W=\{W(\mathbf{Z}),\mathbf{Z}\in R_+^n\}$ 为 n 参数布朗运动.由(2.1)

$$EW(\mathbf{Z})=0,\ EW(\mathbf{Z})W(\mathbf{Z}')=\prod_{i=1}^{n}(z_i\wedge z'_i),\tag{2.2}$$

其中 $a\wedge b=\min(a,b)$.以下恒设 $W(\mathbf{Z})$ 对 $\mathbf{Z}$ 连续.

对已给 n 维向量,$\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$,$\alpha_i>0$,常数 $\sigma>0$,由下式所定义的过程 $X=\{X(\mathbf{Z}),\mathbf{Z}\in R_+^n\}$ 称为 n 参数 1 维 OUP,

$$X(\mathbf{Z})=\mathrm{e}^{-\boldsymbol{\alpha}\mathbf{Z}}\left[X_0+\sigma\int_0^{\mathbf{Z}}\mathrm{e}^{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{a}}\mathrm{d}W(\boldsymbol{a})\right],\tag{2.3}$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}\mathbf{Z}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i z_i$,$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{a}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i a_i$,$X_0$ 为与 W 独立的随机变数,积分为 n 重随机积分.

设 $X_1,\cdots,X_d$ 为 d 个相互独立的 n 参数 1 维 OUP,令

$$X^{n,d}(\mathbf{Z}) = \{X_1(\mathbf{Z}),\cdots,X_d(\mathbf{Z})\},$$

并称 $X^{n,d} = \{X^{n,d}(\mathbf{Z}),\mathbf{Z} \in R_1^n\}$ 为 n 参数 d 维 OUP，简记为 OUP_n^d，当 $d = 1$ 时，简记为 OUP_n.

为简单计，本篇只讨论 $X^{2,1}$，即 OUP_2，并记为 $X = \{X(\mathbf{Z}),\mathbf{Z} \in R_+^2\}$，许多结果可推广到 $X^{n,d}$. 以下 $\mathbf{Z} = (s,t) \in R_+$，$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha,\beta)$，$\boldsymbol{a} = (a,b)$，而 s,t,α,β,a,b,u,v 等皆表示实数. 于是可写 $X = \{X(s,t),s \geqslant 0,t \geqslant 0\}$，(2.3) 化为

$$X(s,t) = \mathrm{e}^{-\alpha s-\beta t}\left[X_0 + \sigma\int_0^s\int_0^t \mathrm{e}^{\alpha a+\beta b}\mathrm{d}W(a,b)\right]. \tag{2.4}$$

令 $I = \{I(s,t),s \geqslant 0,t \geqslant 0\}$，其中

$$I(s,t) = \int_0^s\int_0^t \mathrm{e}^{\alpha a+\beta b}\mathrm{d}W(a,b). \tag{2.5}$$

显然，I 为二参数正态过程. 记 $\bar{s} = \max(s_1,s_2)$，$\underline{s} = \min(s_1,s_2)$；$\chi_s(a) = 1$，如 $a \in [0,s]$，$\chi_s(a) = 0$，如 $a > s$. 则 $EI(s,t) = 0$，又

$$\begin{aligned}
&EI(s_1,t_1)I(s_2,t_2)\\
&= E\left[\int_0^{\bar{s}}\int_0^{\bar{t}}\chi_{s_1}(a)\chi_{t_1}(b)\mathrm{e}^{\alpha a+\beta b}\mathrm{d}W(a,b)\right.\\
&\quad\left.\times\int_0^{\bar{s}}\int_0^{\bar{t}}\chi_{s_2}(a)\chi_{t_2}(b)\mathrm{e}^{\alpha a+\beta b}\mathrm{d}W(a,b)\right]\\
&= \int_0^{\bar{s}}\int_0^{\bar{t}}\chi_{\underline{s}}(a)\chi_{\underline{t}}(b)\mathrm{e}^{2\alpha a+2\beta b}\mathrm{d}a\mathrm{d}b\\
&= \int_0^{\underline{s}}\mathrm{e}^{2\alpha a}\mathrm{d}a \cdot \int_0^{\underline{t}}\mathrm{e}^{2\beta b}\mathrm{d}b\\
&= (\mathrm{e}^{2\alpha(s_1\wedge s_2)} - 1)(\mathrm{e}^{2\beta(t_1\wedge t_2)} - 1)/4\alpha\beta.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

特别，方差

$$DI(s,t) = (\mathrm{e}^{2\alpha s} - 1)(\mathrm{e}^{2\beta t} - 1)/4\alpha\beta. \tag{2.7}$$

命题 2.1* 下列二过程等价(即有相同的有穷维分布)：

i) $X = \{X(s,t),s \geqslant 0,t \geqslant 0\}$，它由(2.4)定义；

ii) $\overline{X} = \{\overline{X}(s,t),s \geqslant 0,t \geqslant 0\}$，其中

$$\overline{X}(s,t) = \mathrm{e}^{-\alpha s-\beta t}\left[X_0 + \sigma W\left(\frac{\mathrm{e}^{2\alpha s} - 1}{2\alpha},\frac{\mathrm{e}^{2\beta t} - 1}{2\beta}\right)\right].$$

---

* 在本篇的原始论文中有 iii)，现把 iii) 删除了.

证 令 $Y(s,t)=W\left(\frac{e^{2\alpha s}-1}{2\alpha},\frac{e^{2\beta t}-1}{2\beta}\right)$,
则 $Y=\{Y(s,t),s\geqslant 0,t\geqslant 0\}$ 是正态过程, $EY(s,t)=0$; 又由(2.2)

$$
\begin{aligned}
&EY(s_1,t_1)Y(s_2,t_2)\\
&=\left(\frac{e^{2\alpha s_1}-1}{2\alpha}\wedge\frac{e^{2\alpha s_2}-1}{2\alpha}\right)\cdot\left(\frac{e^{2\beta t_1}-1}{2\beta}\wedge\frac{e^{2\beta t_2}-1}{2\beta}\right)\\
&=EI(s_1,t_1)I(s_2,t_2).
\end{aligned}
$$

故 I 与 Y 有相同的有穷维分布,从而 X 与 $\overline{X}$ 等价. ∎

注 2.1 过程 $Z=\{Z(s,t),s\geqslant 0,t\geqslant 0\}$:

$$
\begin{aligned}
&Z(s,t)\\
&=e^{-\alpha s-\beta t}X_0+\sigma\sqrt{(1-e^{-\alpha s})(1-e^{-2\beta t})/4\alpha\beta}\,W(1,1)
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

与 X 有相同的一维分布,但相关函数不同.

记 $(u,v)\leqslant(s,t)$,如 $u\leqslant s,v\leqslant t$;记 $(u,v)<(s,t)$,如 $u<s$, $v<t$. 对 $(s,t)\in R_+^2$,考虑 σ- 代数 $\mathscr{F}_{st}=\sigma\{X_0,W(a,b),(a,b)\leqslant(s,t)\}$. 显然, $X(s,t)$ 为 $\mathscr{F}_{st}$ 可测;而且对 $(u,v)\leqslant(s,t)$,有 $\mathscr{F}_{uv}\subset\mathscr{F}_{st}\subset\mathscr{F}$.

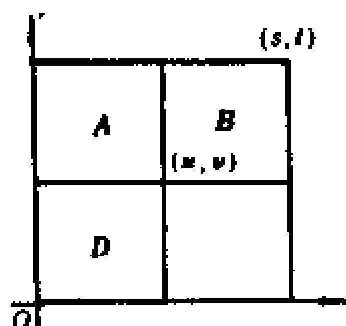
对任 $Q\in\mathscr{B}_b^2$,定义

$$
I(Q)=\iint_Q e^{\alpha a+\beta b}dW(a,b). \tag{2.9}
$$

命题 2.2 如 $(u,v)\leqslant(s,t)$,则

$$
X(s,t)=e^{-\alpha(s-u)-\beta(t-v)}X(u,v)+\sigma e^{-\alpha s-\beta t}I(A\cup B\cup C). \tag{2.10}
$$

其中三矩形



$$
\begin{aligned}
A&=[0,u]\times[v,t],\\
B&=[u,s]\times[v,t],\\
C&=[u,s]\times[0,v].
\end{aligned}
$$

证明 由(2.4)(2.5)

$$
\begin{aligned}
&X(s,t)\\
&=e^{-\alpha s-\beta t}[X_0+\sigma I(s,t)]
\end{aligned}
$$

$$= e^{-\alpha(s-u)-\beta(t-v)}\{e^{-\alpha u-\beta v}[X_0+\sigma I(u,v)]$$
$$+\sigma e^{-\alpha u-\beta v}I(A\cup B\cup C)\}$$
$$= e^{-\alpha(s-u)-\beta(t-v)}X(u,v)+\sigma e^{-\alpha s-\beta t}I(A\cup B\cup C). \quad ∎$$

(2.10) 是(2.4) 之推广，它把 X 任两点$(u,v)\leqslant(s,t)$ 之值联系起来.

定理 2.1 X 是马尔可夫过程，即它具有通常意义下的马尔可夫性：对在二点$(u,v)\leqslant(s,t)$，在已知 $X(u,v)$ 的条件下，$X(s,t)$ 与 $\mathscr{F}_{uv}$ 独立，因而更与 $\mathscr{F}_{uv}^X=\sigma\{X(a,b):(a,b)\leqslant(u,v)\}$ 独立. 这时 $X(s,t)$ 有条件分布密度为

$$p((u,v),x;(s,t),y)$$
$$=\frac{1}{H\sqrt{2\pi}}\exp\left\{\frac{|y-e^{-\alpha(s-u)-\beta(t-v)}x|^2}{2H^2}\right\}, \tag{2.11}$$

即正态分布 $N(e^{-\alpha(s-u)-\beta(t-v)}x,H^2)$ 的密度，其中

$$H^2=\frac{\sigma^2}{4\alpha\beta}[e^{-2\alpha(s-u)}(1-e^{-2\alpha u})(1-e^{-2\beta(t-v)})$$
$$+e^{-2\beta(t-v)}(1-e^{-2\beta v})(1-e^{-2\alpha(s-u)})$$
$$+(1-e^{-2\alpha(s-u)})(1-e^{-2\beta(t-v)})]. \tag{2.12}$$

证 由(2.10)，当 $X(u,v)=x$ 时，

$$X(s,t)=e^{-\alpha(s-u)-\beta(t-v)}x+\sigma e^{-\alpha s-\beta t}I(A\cup B\cup C). \tag{2.13}$$

对 $E\subset R_+^2$，定义 σ- 代数

$$\mathscr{F}(E)=\sigma\{W(G):G\subset E,G\in\mathscr{B}_b^2\}. \tag{2.14}$$

如 $M\subset R_{uv}:=[0,u]\times[0,v]$，$N\subset A\cup B\cup C$，则由(2.1)，

$$EW(M)W(N)=0.$$

既然 $W(M)$、$W(N)$ 有正态分布，故 $W(M)$ 与 $W(N)$ 独立，由此知 $\mathscr{F}(A\cup B\cup C)$ 与 $\mathscr{F}(R_{uv})$ 独立. 由于 $\mathscr{F}_{uv}=\mathscr{F}(X_0)\vee\mathscr{F}(R_{uv})$，而 X_0 与 W 独立，故 $\mathscr{F}(A\cup B\cup C)$ 也与 $\mathscr{F}_{uv}$ 独立. 因为 $I(A\cup B\cup C)$ 为 $\mathscr{F}(A\cup B\cup C)$ 可测，而(2.13) 右方第一项为常数，于是得证在 $X(u,v)=x$ 时，$X(s,\cdot)$ 与 $\mathscr{F}_{uv}$ 独立. 注意 $\mathscr{F}_{uv}^X\subset\mathscr{F}_{uv}$，知此时 $X(s,t)$ 也与 $\mathscr{F}_{uv}^X$ 独立.

注意(2.10)右方二项相互独立.由(2.13)知$X(s,t)$有正态分布,

$$EX(s,t)=\mathrm{e}^{-\alpha(s-u)-\beta(t-v)}x,$$

$$DX(s,t)=\sigma^2\mathrm{e}^{-2\alpha s-2\beta t}[DI(A)+DI(B)+DI(C)], \tag{2.15}$$

而

$$DI(A)=E\left[\int_0^u\int_v^t \mathrm{e}^{\alpha a+\beta b}\mathrm{d}W(a,b)\right]^2$$

$$=\int_0^u\int_v^t \mathrm{e}^{2\alpha a+2\beta b}\mathrm{d}a\mathrm{d}b=(\mathrm{e}^{2\alpha u}-1)(\mathrm{e}^{2\beta t}-\mathrm{e}^{2\beta v})/4\alpha\beta,$$

同理

$$DI(B)=(\mathrm{e}^{2\alpha s}-\mathrm{e}^{2\alpha u})(\mathrm{e}^{2\beta t}-\mathrm{e}^{2\beta v})/4\alpha\beta,$$

$$DI(C)=(\mathrm{e}^{2\alpha s}-\mathrm{e}^{2\alpha u})(\mathrm{e}^{2\beta v}-1)/4\alpha\beta,$$

代入(2.15)即得(2.12)、(2.11) ∎

如视(u,v)为"现在",则$\mathscr{F}_{uv}^X$是描述"过去"的σ-代数,而

$$\mathscr{F}^{uv}=\sigma\{X(s,t),s\geqslant u,t\geqslant v\},$$

则是描述"将来"的σ-代数.

系 2.1 如已知$X(u,v)=x$,则$\mathscr{F}_{uv}^X$(以及$\mathscr{F}_{uv}$)与$\mathscr{F}^{uv}$独立.

由此知"过去"与"将来"关于"现在"是对称的.X的马尔可夫性也可仿下面(4.5)式之证以给出另一证明.

称(2.11)中的$p:=p((u,v),x;(s,t),y)$为X的转移密度;它是非时齐的,即p不仅依赖于$s-v$与$t-v$,而且依赖于u与v.其原因是二矩形之差$R_{st}\backslash R_{uv}$的面积既依赖$s-u,t-v$,也依赖u与v.由此可以想象一般的多参数马尔可夫过程在此意义下大都是非时齐的.这是与单参数情况的一个显著区别.

虽然如此,OUP_2却有下列意义的"时齐性".回忆(2.4),并对任$u\geqslant 0,v\geqslant 0$,定义过程$X^{uv}=\{X^{uv}(s,t),s\geqslant 0,t\geqslant 0\}$:

$$X^{uv}(s,t)=\mathrm{e}^{-\alpha s-\beta t}\Big[X(u,v)$$

$$+\sigma\mathrm{e}^{-\alpha u-\beta v}\int_u^{u+s}\int_v^{v+t}\mathrm{e}^{\alpha a+\beta b}\mathrm{d}W(a,b)\Big], \tag{2.16}$$

注意此中积分区域为矩形,$[u,u+s]\times[v,v+t]$,其位置相当于

上图中的 B，而与矩形 R_π 有相同面积，R_π 是(2.4)中的积分区域. 如 $X(u,v)=X_0=x$，则 $X(s,t)$ 与 $X^{uv}(s,t)$ 有相同的不依赖于 u，v 的正态分布

$$N\left(e^{-\alpha s-\beta t}x,\frac{\sigma^2}{4\alpha\beta}(1-e^{-2\alpha s})(1-e^{-2\beta t})\right).$$

实际上，它的方差就是(2.12)中最后一项以 s 代替 $s-u$，以 t 代替 $t-v$ 以后所得到的. 其实还可证明 X 与 X^{uv} 等价. 由(2.11)、(2.12)知：

当 s 固定，$t\to\infty$ 时，p 趋于 $N\left(0,\frac{\sigma^2}{2\alpha\beta}(1-e^{-2\alpha s})\right)$ 之密度；

当 t 固定，$s\to\infty$ 时，p 趋于 $N\left(0,\frac{\sigma^2}{4\alpha\beta}(1-e^{-2\beta t})\right)$ 之密度；

当 $s\to\infty,t\to\infty$ 时，p 趋于 $N\left(0,\frac{\sigma^2}{4\alpha\beta}\right)$ 之密度.

对 OUP_2*，即使取 $N\left(0,\frac{\sigma^2}{4\alpha\beta}\right)$ 为开始分布，过程也非平稳，而只是渐近平稳的. 实际上，对 $s\geqslant 0,t\geqslant 0$，$X$ 的相关函数为

$$EX(u,v)X(u+s,v+t)=E\{e^{-\alpha u-\beta v}[X_0+\sigma I(u,v)]e^{-\alpha(u+s)-\beta(v+t)}[X_0+\sigma I(u+s,v+t)]\}.$$

由于 X_0 与 $I(u,v)$ 独立，X_0 有 $N\left(0,\frac{\sigma^2}{4\alpha\beta}\right)$ 分布，并用(2.6)得知上式等于

$$\begin{aligned}&e^{-\alpha(2u+s)-\beta(2v+t)}[EX_0^2+\sigma^2 EI(u,v)I(u+s,v+t)]\\&=\frac{\sigma^2}{2\alpha\beta}e^{-\alpha(2u+s)-\beta(2v+t)}[1+(e^{2\alpha u}-1)(e^{2\beta v}-1)]\\&\longrightarrow\frac{\sigma^2}{4\alpha\beta}e^{-\alpha s-\beta t}(u\to\infty,v\to\infty),\end{aligned}\tag{2.17}$$

由(2.11)还可见二参数 d 维 OUP $X^{2,d}$ 之转移概率密度为

$$\begin{aligned}&p((u,v),x;(s,t),y)\\&=\left(\frac{1}{H\sqrt{2\pi}}\right)^d\exp\left\{-\frac{|y-e^{-\alpha(s-u)-\beta(t-v)}x|^2}{2H^2}\right\},\end{aligned}\tag{2.18}$$

---

* 在本篇的原始论文中，在"对 OUP_2"之前，有"对单参数 OUP_1，…"的一句话，与正文无关，现删除了.

其中 $x \in R^d, y \in R^d, |x-y|$ 表示 R^d 中欧氏距离.

20.3 OUP_1 与 OUP_2 的关系

设 $X = \{X(s,t), s \geqslant 0, t \geqslant 0\}$ 为由(2.4)定义的 OUP_2. 固定 $c > 0$,得到 X 的 c- 截口过程 $X_c := \{X(s,c), s \geqslant 0\}$,它是单参数 s 的过程.X_c 是否 OUP_1?

定理 3.1 i)X_c 等价于某 OUP_1,其常值参量 $\tilde{\alpha}$、$\tilde{\sigma}$ 及开始值 $\tilde{X}_0$ 分别为

$$\tilde{\alpha} = \alpha, \quad \tilde{\sigma} = \sigma\sqrt{\frac{1-\mathrm{e}^{-2\beta c}}{2\beta}}, \quad \tilde{X}_0 = X(0,c),$$

ii) 反之,可造二列相互独立的 OUP_1:$\{X^i(s), s \geqslant 0\}$、$\{Y^i(t), t \geqslant 0\}$,$i = 1,2,\cdots$,使对任一固定的 $(s,t) \in R_+^2$ 及 $a \in R^1$,有

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\mathrm{e}^{-\alpha s-\beta t}X_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} X^i(s)Y^i(t) \leqslant a\right)$$
$$= P(X(s,t) \leqslant a), \tag{3.1}$$

这里 $X^i(0) = Y^i(0) = 0$,X^i 之常值参量为 α 及 $\sigma = 1$,Y^i 之常值参量为 β 及 $\sigma = 1$.

证 i) 由(2.10)

$$X(s,c) = \mathrm{e}^{-\alpha s}X(0,c) + \sigma\mathrm{e}^{-\alpha s-\beta c}\int_0^s\int_0^c \mathrm{e}^{\alpha a+\beta b}\mathrm{d}W(a,b), \tag{3.2}$$

仍由(2.10)得知 $X(0,c) = \mathrm{e}^{-\beta c}X_0$ 与 W 独立,从而与 $J(s,c)$ 独立,这里

$$J(s,c) := \mathrm{e}^{-\alpha s-\beta c}\int_0^s\int_0^c \mathrm{e}^{\alpha a+\beta b}\mathrm{d}W(a,b),$$

$J_c = \{J(s,c), s \geqslant 0\}$ 是正态过程,$EJ(s,c) = 1$,且由(2.6)

$$EJ(s_1,c)J(s_2,c)$$
$$= \mathrm{e}^{-\alpha(s_1+s_2)-2\beta c} \cdot \frac{\mathrm{e}^{2\alpha(s_1\wedge s_2)}-1}{2\alpha} \cdot \frac{\mathrm{e}^{2\beta c}-1}{2\beta}.$$

另方面，取标准布朗运动$\{W(a),a\geqslant 0\}$，它与$X(0,c)$独立，考虑OUP_1 $\tilde{Z}=\{X(s),s\geqslant 0\}$：

$$X(s)=\mathrm{e}^{-\alpha s}X(0,c)+\sigma\sqrt{\frac{1-\mathrm{e}^{-2\beta c}}{2\beta}}\mathrm{e}^{-\alpha s}\int_0^s\mathrm{e}^{\alpha a}\mathrm{d}W(a). \tag{3.3}$$

令

$$J(s)=\sqrt{\frac{1-\mathrm{e}^{-2\beta c}}{2\beta}}\mathrm{e}^{-\alpha s}\int_0^s\mathrm{e}^{\alpha a}\mathrm{d}W(a),$$

$J=\{J(s),s\geqslant 0\}$也是正态过程，$EJ(s)=0$，而且

$$E[J(s_1)J(s_2)]=E[J(s_1,c)J(s_2,c)],$$

故J_c与J等价. 由(3.2)(3.3)知X_c与$\tilde{X}$等价.

注意，此结论也可利用命题2.1证明.

ii) 设

$$Z(s,t)=\mathrm{e}^{-\alpha s-\beta t}\int_0^s\int_0^t\mathrm{e}^{\alpha a+\beta b}\mathrm{d}W(a,b),$$

则 $X(s,t)=\mathrm{e}^{-\alpha s-\beta t}X_0+\sigma Z(s,t)$. 取二列相互独立的标准布朗运动$\{W_i(a),a\geqslant 0\}\{\widetilde{W}_i(b),b\geqslant 0\}$，利用它们作二列相互独立的$\mathrm{OUP}_1\{X^i(s),s\geqslant 0\}$、$\{Y^i(s),s\geqslant 0\}$：

$$X^i(s)=\int_0^s\mathrm{e}^{-\alpha(s-a)}\mathrm{d}W_i(a), \tag{3.4}$$

$$Y^i(t)=\int_0^t\mathrm{e}^{-\beta(t-b)}\mathrm{d}\widetilde{W}_i(b). \tag{3.5}$$

易知

$$EX^i(s)=EY^i(t)=EX^i(s)Y^i(t)=0,$$

$$DX^i(s)=\frac{1-\mathrm{e}^{-2\alpha s}}{2\alpha},\quad DY^i(t)=\frac{1-\mathrm{e}^{-2\beta t}}{2\beta},$$

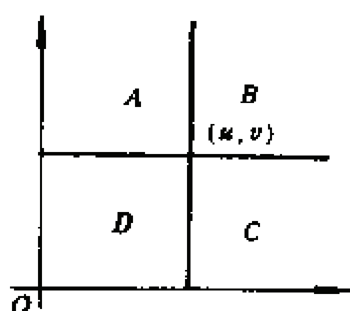
$$\begin{aligned}DX^i(s)Y^i(t)&=E[X^i(s)]^2\cdot E[Y^i(t)]^2\\&=\frac{1-\mathrm{e}^{-2\alpha s}}{2\alpha}\cdot\frac{1-\mathrm{e}^{-2\beta t}}{2\beta}.\end{aligned} \tag{3.6}$$

由中心极限定理，$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}X^i(s)Y^i(t)$之分布弱收敛于

$N\left(0,\frac{1-e^{-2\alpha s}}{2\alpha}\cdot\frac{1-e^{-2\beta t}}{2\beta}\right)$，即 $X(s,t)$ 之分布. 利用独立性，得证 (3.1). ∎

20.4 宽过去马尔可夫性

由于对“过去”、“现在”和“将来”的理解不同，可以有多种马尔可夫性. 最简单的理解如定理 2.1 所示，那里的“现在”只是一个点 (u,v)，因之“现在”所含的信息是相当少的，它只能决定窄的“将来”与窄的“过去”的条件独立性. 如果“将来”或“过去”较宽，那么“现在”也应该较宽. 在定理 2.1 中，“将来”是集 $B=((s,t):(u,v)\leqslant(s,t))$，“过去”是集 $D=((a,b):(a,b)\leqslant(u,v))$. 至于 $A=((a,b):a\leqslant u,b\geqslant v)$ 与 $C=((a,b):a\leqslant u,b\geqslant v)$，则未论及. 但在所谓宽过去马尔可夫性中，则把 $K:=A\cup D\cup C$ 都看成“过去”，而把 K 的边界 ∂K 看成“现在”.

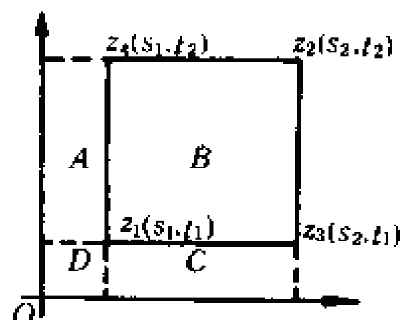


对 $(u,v)\in R_+^2$，定义三个 σ- 代数

$$\mathscr{F}_{uv}^{*}:=\sigma\{X(z),z\in K\}=\sigma\{X(a,b),a\leqslant u \text{ 或 } b\leqslant v\},$$

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_{uv}^{b}:&=\sigma\{X(z),z\in\partial K\}\\&=\sigma\{X(0,0);X(a,v),a\geqslant u;\\&\qquad X(u,b),b\geqslant v\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{F}^{uv}:&=\sigma\{X(z),z\in B\}\\&=\sigma\{X(a,b),a>u,b>v\}.\end{aligned}$$



称过程 $\{X(z),z\in R_+^2\}$ 具有宽过去马尔可夫性，如对任一点 $(u,v)\in R_+^2$，任意 $\mathscr{A}\in\mathscr{F}^{uv}$，有

$$P(\mathscr{A}\mid\mathscr{F}_{uv}^{*})$$

$$= P(\mathscr{A} \mid \mathscr{F}_{uv}^{b})\ (a.s.). \tag{4.1}$$

下面会证明：OUP_2 有宽过去马尔可夫性.

命题 4.1 设 $z_1=(s_1,t_1)$、$z_2=(s_2,t_2)$、$z_3=(s_2,t_1)$，$z_4=(s_1,t_2)$ 是四边平行于坐标轴的矩形 B 的四角点，则存在齐次线性函数 L，其系数皆不为 0（但依赖于 s_i，t_i），使

$$L(X(z_1),X(z_2),X(z_3),X(z_4),I(B)) = 0, \tag{4.2}$$

亦即

$$X(z_2) = e^{-\alpha(s_2-s_1)}X(z_4) + e^{-\beta(t_2-t_1)}X(z_3)$$
$$- e^{-\alpha(s_2-s_1)-\beta(t_2-t_1)}X(z_1) + \sigma e^{-\alpha s_2-\beta t_2}I(B), \tag{4.3}$$

其中 $I(B)$ 由(2.9)定义.

证 由(2.10)得

$$X(z_2) = e^{-\beta(t_2-t_1)}X(z_3) + \sigma e^{-\alpha s_2-\beta t_2}(I(A)+I(B));$$
$$X(z_4) = e^{-\beta(t_2-t_1)}X(z_1) + \sigma e^{-\alpha s_1-\beta t_2}I(A).$$

由此消去 $I(A)$ 即得(4.3). ∎

改写(4.3)为

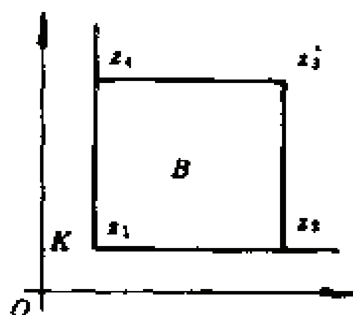
$$\sigma I(B) = e^{\alpha s_2+\beta t_2}X(z_2) - e^{\alpha s_2+\beta t_1}X(z_3)$$
$$- e^{\alpha s_1+\beta t_2}X(z_4) + e^{\alpha s_1+\beta t_1}X(z_1). \tag{4.4}$$

它类似于二元分布函数的增量公式，而且其系数很有规律.

定理 4.1 OUP_2 有宽过去马尔可夫性.

证 只要证得对任二点 $(u,v) \leqslant (s,t)$ 及任意 $d \in R^1$，有

$$P(X(s,t) \leqslant d \mid \mathscr{F}_{uv}^{*}) = P(X(s,t) \leqslant d \mid \mathscr{F}_{uv}^{b}),\ (a.s.). \tag{4.5}$$



设 B 是以 $z_1=(u,v)$、$z_2=(s,t)$ 及另二点 z_3、z_4 为角点的矩形. 由(4.3)

$$X(s,t) \equiv X(z_2)$$
$$= L_1 + aI(B),$$

其中 L_1 是 $X(z_1)$、$X(z_3)$、$X(z_4)$ 的线性函数，a 为常数. 令 $K = ((a,b): a \leqslant u$ 或 $b \leqslant v)$，又 G 为 σ- 代数：

$$G:=\sigma\{X(0,0),W(F),F\subset K,F\in\mathscr{B}_b^2\}$$
$$\supset\mathscr{F}_{uv}^*=\mathscr{F}_{uv}^*\vee\mathscr{F}_{uv}^b.$$

显然,L_1 为 $\mathscr{F}_{uv}^b$ 可测而且 $I(B)$ 与 G 独立.故条件特征函数

$$E(\mathrm{e}^{i\xi X(z_2)}|G)=E(\mathrm{e}^{i\xi L_1-i\xi aI(B)}|G)$$
$$=\mathrm{e}^{i\xi L_1}\cdot E\mathrm{e}^{i\xi aI(B)}).$$

同理知 $E(\mathrm{e}^{i\xi X(z_2)}|\mathscr{F}_{uv}^b)$ 也等于最后一项,故有

$$E(\mathrm{e}^{i\xi x(z_2)}|G)=E(\mathrm{e}^{i\xi X(z_2)}|\mathscr{F}_{uv}^b)\ (a.s.).\tag{4.6}$$

考虑条件分布函数 $F_1(y,\omega)$、$F_2(y,\omega)$,使对任 $y\in R^1$,几乎处处有

$$F_1(y,\omega)=P(X(z)\leqslant y|G),$$
$$F_2(y,\omega)=P(X(z)\leqslant y|\mathscr{F}_{uv}^b).$$

这里 $z=z_2$.由(4.6)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{i\xi y}F_1(\mathrm{d}y,\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{i\xi y}F_2(\mathrm{d}y,\omega)\ (a.s)$$

于是由分布函数与特征函数的一一对应,得

$$F_1(y,\omega)=F_2(y,\omega)\qquad(a.s),$$

从而

$$P(X(z)\leqslant y|G)=P(X(z)\leqslant y|\mathscr{F}_{uv}^b)\ (a.s)\tag{4.7}$$

由于 $G\supset\mathscr{F}_{uv}^*\supset\mathscr{F}_{uv}^b$,故得证(4.5). ∎

对 $z_1=(u,v)<(s,t)=z_2,z_3=(s,v),z_4=(u,t)$,考虑正态分布密度

$$f(\xi):=f(z_1,x_1;z_3,x_3;z_4,x_4;z_2,\xi)$$
$$=\frac{1}{H_1\sqrt{2\pi}}\exp\{-|\xi+\mathrm{e}^{-\alpha(s-u)-\beta(t-v)}x_1$$
$$-\mathrm{e}^{-\beta(t-v)}x_3-\mathrm{e}^{-\alpha(s-u)}x_4|^2/2H_1^2\}.\tag{4.8}$$

其中 $H_1^2=\sigma^2(1-\mathrm{e}^{-2\alpha(s-u)})(1-\mathrm{e}^{-2\beta(t-v)})/4\alpha\beta$.称 $f(\xi)$ 为三点转移概率密度.

注 4.1 $f(\xi)$ 对"时间"是齐次的,即只依赖于 $s-u$、$t-v$;它对一切变量 x_1,x_3,x_4 及 u、v、s、t,$\alpha>0,\beta>0,\sigma>0$ 连续;当 $s\to\infty,t\to\infty$ 时,$f(\xi)$ 趋于 $N(0,\sigma^2/4\alpha\beta)$ 的密度.

定理 4.2 对 $z_2=(s,t)>(u,v)=z_1$,以概率 1 有

$$
\begin{aligned}
&P(X(z_2) \leqslant y \mid \mathscr{F}^{*}_{uv}) \\
&\qquad = P(X(z_2) \leqslant y \mid X(z_1), X(z_3), X(z_4)) \\
&\qquad = \int_{-\infty}^{y} f(z_1, x_1; z_3, x_3; z_4, x_4; z_2, \xi) \mathrm{d}\xi,
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

其中 $x_i = X(z_i), i = 1,3,4$.

证　利用(4.3),同样可证 ∎

$$E(\mathrm{e}^{i\xi X(z_2)} \mid \mathscr{F}^{*}_{uv}) = E(\mathrm{e}^{i\xi X(z_2)} \mid X(z_1), X(z_3), X(z_4)).$$

由此及(4.5)即得(4.9)中第一等式.

以(u,v)、(s,t)分别代入(4.2)中的(s_1,t_1)、(s_2,t_2). 由于$I(B)$与$\mathscr{F}^{*}_{uv}$独立,更与$X(z_i)(i=1,3,4)$独立,故条件$X(z_i)=x_i(i=1,3,4)$不影响$I(B)$之分布. 在此条件下,由(4.3)知$X(z_2)$有正态分布,而且

$$
\begin{aligned}
&EX(z_2) = -\mathrm{e}^{-\alpha(s-u)-\beta(t-v)} x_1 + \mathrm{e}^{-\beta(t-v)} x_3 + \mathrm{e}^{-\alpha(s-u)} x_4; \\
&DX(z_2) = \sigma^2 \mathrm{e}^{-2\alpha s-2\beta t} DI(B) \\
&= \sigma^2 \mathrm{e}^{-2\alpha s-2\beta t} \int_u^s \mathrm{e}^{2\alpha a} \mathrm{d}a \cdot \int_v^t \mathrm{e}^{2\beta b} \mathrm{d}b = H_1^2.
\end{aligned}
$$

故知在条件$X(z_i)=x_i(i=1,3,4)$之下,$X(z_2)$的分布密度为$f(\xi)$,此得证(4.9). ∎

20.5　强马尔可夫性

称随机向量(σ,τ)为停点,如对任意$(u,v) \in R^2_+$,有

$$(\sigma \leqslant u, \tau \leqslant v) \in \mathscr{F}^{*}_{uv},$$

定义σ-代数

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}^{*}_{\sigma\tau} = \{A: A \in \mathscr{F}, A(\sigma \leqslant u, \tau \leqslant v) \in \mathscr{F}^{*}_{uv}, \\
\text{对一切 } u \geqslant 0, v \geqslant 0\}.
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

定理 5.1　OUP_2有强马尔可夫性,对任意有限停时(σ,τ),任意$s>0, t>0, y \in R^1$,有

$$P(X(\sigma+s, \tau+t) \leqslant y \mid \mathscr{F}^{*}_{\sigma\tau})$$

$$= P(X(\sigma + s, \tau + t) \leqslant y | X(\sigma, \tau), X(\sigma + s, \tau), X(\sigma, \tau + t))$$
$$(a.s.). \tag{5.2}$$

证 设$g(x), x \in R^1$为有界连续函数，试证以概率 1 有

$$E[g(X(\sigma + s, \tau + t)) | \mathscr{F}_{\sigma\tau}^*]$$
$$= E[g(X(\sigma + s, \tau + t)) | X(\sigma, \tau), X(\sigma + s, \tau), X(\sigma, \tau + t)]. \tag{5.3}$$

定义

$$\sigma_n = \frac{j}{2^n}, \quad \text{如} \frac{j-1}{2^n} < \sigma \leqslant \frac{j}{2^n};$$
$$\tau_n = \frac{j}{2^n}, \quad \text{如} \frac{j-1}{2^n} < \tau \leqslant \frac{j}{2^n};$$

对任意 $A \in \mathscr{F}_{\sigma\tau}^*$，令

$$A(n,i,j) = A\left(\frac{i-1}{2^n} < \sigma \leqslant \frac{i}{2^n}, \frac{j-1}{2^n} < \tau \leqslant \frac{j}{2^n}\right),$$

我们有

$$\int_A g(X(\sigma_n + s, \tau_n + t)) P(\mathrm{d}\omega)$$
$$= \sum_{i,j} \int_{A(n,i,j)} g\left(X\left(\frac{i}{2^n} + s, \frac{j}{2^n} + t\right)\right) P(\mathrm{d}\omega).$$

易见 $A(n,i,j) \in \mathscr{F}_{i/2^n, j/2^n}^*$. 由定理 4.2,

$$\text{上式} = \sum_{i,j} \int_{A(n,i,j)} E\left[g\left(X\left(\frac{i}{2^n} + s, \frac{j}{2^n} + t\right)\right) \middle| X\left(\frac{i}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right),\right.$$
$$\left. X\left(\frac{i}{2^n} + s, \frac{j}{2^n}\right), X\left(\frac{i}{2^n}, \frac{j}{2^n} + t\right)\right] P(\mathrm{d}\omega)$$
$$= \int_A E[g(X(\sigma_n + s, \tau_n + t)) | X(\sigma_n, \tau_n), X(\sigma_n + s, \tau_n),$$
$$X(\sigma_n, \tau_n + t)] P(\mathrm{d}\omega)$$
$$= \int_A \int_{-\infty}^{\infty} g(y) f((0,0), X(\sigma_n, \tau_n); (s,0), X(\sigma_n + s, \tau_n);$$
$$(0,t), X(\sigma_n, \tau_n + t); (s,t), y) \mathrm{d}y P(\mathrm{d}\omega).$$

当 $n \to \infty$ 时，由于 $X(z)$ 对 z 的连续性及g的有界连续性，上式最左方趋于

$$\int_A g(X(\sigma+s,\tau+t))P(\mathrm{d}\omega);$$

而最右方则由(4.8)及注4.1趋于

$$\int_A E[g(X(\sigma+s,\tau+t))|X(\sigma,\tau),$$
$$X(\sigma+s,\tau),X(\sigma,\tau+t)]P(\mathrm{d}\omega).$$

于是证明了(5.3)对有界连续的g成立.利用$\lambda-\pi$系方法,知(5.3)对一切有界Borel可测函数g也成立;从而完成了(5.2)的证明. ∎

参考文献

[1] 王梓坤.随机过程论.北京:科学出版社,1978.

[2] Zakai Z. Some classes of two-parameter Martingales. Annals of Probability,1981,9(2):255~265

[3] Kuo Hui-hsiung. Uhlenbeck-Ornstein Process on a Riemann-wiener Manifold. Proc. of Intern. Symp. SDE Kyoto,1976,187~193

第21篇 二参数 Ornstein-Uhlenbeck 过程的转移概率及预测

21.1 梯形域的转移概率

设 $z=(u,v)$ 为平面上的点，记 $R_{+}^{2}=(z:u\geqslant 0,v\geqslant 0)$. R_{+}^{2} 中全体 Borel 集记为 $\mathscr{B}_{+}^{2}$，$X=\{X(z,\omega),z\in R_{+}^{2}\}$ 为概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的随机过程，称 X 为二参数 Ornstein-Uhlenbeck 过程 $(\mathrm{OU}P_{2})$，如

$$X(s,t)=\mathrm{e}^{-\alpha s-\beta t}\left[X_{0}+\sigma\int_{0}^{s}\int_{0}^{t}\mathrm{e}^{\alpha a+\beta b}\mathrm{d}W(a,b)\right], \tag{1.1}$$

其中 $\alpha>0,\beta>0,\sigma>0$ 为三常数，$W=\{W(a,b),a\geqslant 0,b\geqslant 0\}$ 为 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的布朗单，X_{0} 是与 W 独立的随机变数.

以原点 O 及点 $z=(s,t)$ 为顶点的矩形记为 R_{z} 或 R_{st}. 说 $z_{1}\leqslant z_{2}$，如其坐标 $s_{1}\leqslant s_{2},t_{1}\leqslant t_{2}$. 记

$$I(A)=\iint_{A}\mathrm{e}^{\alpha a+\beta b}\mathrm{d}W(a,b),$$

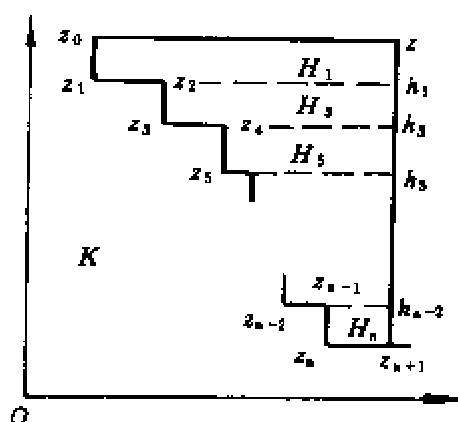
$$M(A)=\iint_{A}\mathrm{e}^{2\alpha a+2\beta b}\mathrm{d}a\mathrm{d}b,A\in\mathscr{B}_{+}^{2}.$$

设 $z_{1}=(u,v)\leqslant z_{2}=(s,t)$，则有下列二点及四点关系式：

$$X(z_{2})=\mathrm{e}^{-\alpha(s-u)-\beta(t-v)}X(u,v)+\sigma\mathrm{e}^{-\alpha s-\beta t}I(R_{st}\backslash R_{uv}), \tag{1.2}$$

$$X(z_2) = e^{-\alpha(s-u)}X(z_4) + e^{-\beta(t-v)}X(z_3)$$
$$- e^{-\alpha(s-u)-\beta(t-v)}X(z_1) + \sigma e^{-\alpha s-\beta t}I(B), \quad (1.3)$$

其中 $z_1, z_2, z_3 = (s,v), z_4 = (u,t)$ 为矩形 B 的顶点. OUP_2 的定义及(1.2)、(1.3)式均见文献[1];那里证明了 X 为强马尔可夫过程,并求出了三点转移概率 $P(X(z_2) \leqslant a | X(z_i) = x_i, i = 1,3,4)$, a 及 x_i 为任意实数.



对 $F \in \mathscr{B}^2_-$, 以 $\mathscr{F}_F$ 表示由 $X(z), z \in F$ 产生的 σ 代数. 对 $z \overline{\in} F$,本篇将对某些 F,求出转移概率 $P(X(z) \leqslant a | \mathscr{F}_F)$,它们以三点转移概率为特例. 此外,还将求出最佳预测及误差.

称 R^2_+ 中一单调下降曲线为简单曲线,如它由有限或可列多条平行于两坐标轴之一的直线段所组成,而且在任一 R_z 内只有有限多个角点,后者是两直线段的交点. 由两坐标轴及简单曲线围成的闭区域称为梯形域.

设 K 为梯形域,点 $z=(s,t) \overline{\in} K$. 自 z 引两平行于两坐标轴的直线,交 K 的边界 ∂K 于 z_0, z_{n+1} 两点,此两点间的角点顺次记为 $z_1, \cdots, z_n$*. 设 z_i 有坐标 (u_i, v_i), $i=0,1,\cdots,n+1$. 显然有

$$\begin{aligned} u_0 = u_1 < u_2 = u_3 < \cdots = u_n < u_{n+1} = s, \\ t = v_0 > v_1 = v_2 > v_3 = \cdots > v_n = v_{n+1}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

注意 $\partial K \subset K$.

定理 1.1 设 $z \overline{\in} K$,则对任意实数 a,有

(i) $P(X(z) \leqslant a | \mathscr{F}_K)$

$$= P(X(z) \leqslant a | X(z_i), i = 0,1,\cdots,n+1) \quad (a.s.); \quad (1.5)$$

(ii) 在 $X(z_i) = x_i$, $(i = 0,1,\cdots,n+1)$ 的条件下,$X(z)$ 有正

* n 必定为奇数. —— 编者

态分布 $N(m,\Sigma^2)$，

$$m = \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i \mathrm{e}^{-\alpha(s-u_i)-\beta(t-v_i)}x_i, \tag{1.6}$$

$$\Sigma^2 = \sigma^2\mathrm{e}^{-2\alpha s-2\beta t}M(R_z\backslash K). \tag{1.7}$$

证　自角点 $z_1,z_3,\cdots,z_{n-2}$ 向 $\overline{zz_{n-1}}$ 作垂线，交点记为 $h_i=(s,v_i)$，$i=1,3,5,\cdots,n-2$. 于是得 $\frac{n+1}{2}$ 个矩形 $zz_0z_1h_1,h_1z_2z_3h_3,\cdots,h_{n-2}z_{n-1}z_nz_{n-1}$ 分别记为 $H_1,H_3,\cdots,H_n$. 对这些矩形运用(1.3)式，并注意(1.4)式，得

$$X(z)=\mathrm{e}^{-\alpha(s-u_0)}X(z_0)+\mathrm{e}^{-\beta(t-v_1)}X(h_1)$$
$$-\mathrm{e}^{-\alpha(s-u_1)-\beta(t-v_1)}X(z_1)+\sigma\mathrm{e}^{-\alpha s-\beta t}I(H_1),$$
$$\cdots$$
$$X(h_{n-2})=\mathrm{e}^{-\alpha(s-u_{n-1})}X(z_{n-1})+\mathrm{e}^{-\beta(v_{n-2}-v_n)}X(z_{n+1})$$
$$-\mathrm{e}^{-\alpha(s-u_n)-\beta(v_{n-2}-v_n)}X(z_n)+\sigma\mathrm{e}^{-\alpha s-\beta v_{n-2}}I(H_n).$$

由此方程组消去 $X(h_i)$，$i=1,3,5,\cdots,n-2$，并注意 $\sum_i I(H_i)=I(R_z\backslash K)$，即得

$$X(z)=\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i\mathrm{e}^{-\alpha(s-u_i)-\beta(t-v_i)}X(z_i)$$
$$+\sigma\mathrm{e}^{-\alpha s-\beta t}I(R_z\backslash K)$$
$$=\Sigma_1+\Sigma_2\quad(\text{设}), \tag{1.8}$$

其中 Σ_1 为 $\sigma\{X(z_i),i=0,1,\cdots,n+1\}\subset\mathscr{F}_K$ 可测，而 Σ_2 与 $\mathscr{F}_K$ 独立，故

$$E(\mathrm{e}^{i\xi X(z)}|\mathscr{F}_K)=\mathrm{e}^{i\xi\Sigma_1}E(\mathrm{e}^{i\xi\Sigma_2})$$
$$=E(\mathrm{e}^{i\xi X(z)}|X(z_i),i=0,1,\cdots,n+1), \tag{1.9}$$

其中 ξ 为实数. 由条件特征函数，取条件分布后即得证(i).

由于 $I(R_z\backslash K)$ 有 $N(0,M(R_z\backslash K))$ 分布，故 Σ_2 有 $N(0,\Sigma^2)$ 分布，当 $X(z_i)=x_i(i=0,1,\cdots,n+1)$ 固定时，Σ_1 等于常数 m. 故由(1.9)式的后一等式即得证(ii). ∎

注 1.1　如 $n=1$，则(ii)中条件概率化为文献[1]中三点转移概率.

以下设 X_0 有 $N(l,d^2)$ 分布，从而 X 为正态过程.

今欲求 R_+^2 中任二点 $z_1=(u,v)$、$z_2=(s,t)$ 间的转移概率 $P(X(s,t)\leqslant a\,|\,X(u,v)=x)$. 当 $z_1\leqslant z_2$ 时，此概率已在文献[1]中求出. 对一般的 z_1,z_2，则需要下列熟知的结果：

设 (ξ_1,ξ_2) 服从二元正态分布，ξ_i 有 $N(m_i,\sigma_i^2)$ 分布，$i=1,2$，相关系数为 ρ；则当 $\xi_1=x$ 时，ξ_2 有正态分布

$$N\left(m_2+\frac{\rho\sigma_2}{\sigma_1}(x-m_1),\sigma_2^2(1-\rho^2)\right). \tag{1.10}$$

今用此结果于 $\xi_1=X(u,v)$，$\xi_2=X(s,t)$. 由(1.1)式

$$m_1=EX(u,v)=\mathrm{e}^{-\alpha u-\beta v}l, \tag{1.11}$$

$$\begin{aligned}\sigma_1^2&=DX(u,v)\\&=\mathrm{e}^{-2\alpha u-2\beta v}\left[d^2+\frac{\sigma^2}{4\alpha\beta}(\mathrm{e}^{2\alpha u}-1)(\mathrm{e}^{2\beta v}-1)\right],\end{aligned} \tag{1.12}$$

以 s,t 代替 u,v 即得 m_2,σ_2. 为求 ρ，只要求出

$$\begin{aligned}&EX(u,v)X(s,t)\\&=\mathrm{e}^{-\alpha(s+u)-\beta(t+v)}\{EX_0^2+\sigma^2E[I(R_{uv})\cdot I(R_{st})]\}\\&=\mathrm{e}^{-\alpha(s+u)-\beta(t+v)}\left[EX_0^2+\frac{\sigma^2}{4\alpha\beta}(\mathrm{e}^{2\alpha(u\wedge s)}-1)(\mathrm{e}^{2\beta(v\wedge t)}-1)\right],\end{aligned} \tag{1.13}$$

其中 $a\wedge b=\min(a,b)$. 从而可对一般的 z_1,z_2 求出转移概率. 特别，当 $z_1\leqslant z_2$ 时，比较文献[1]中的定理 2.1，可得 $\frac{\rho\sigma_2}{\sigma_1}=\mathrm{e}^{-\alpha(s-u)-\beta(t-v)}$.

21.2 闭矩形的转移概率

今求闭矩形 R 的转移概率，其角点为 $z_1=(u,v)$，$z_2=(s,t)$，$z_3=(s,v)$，$z_4=(u,t)$，又 $z_1<z_2$，边界为 ∂R. 设 $z=(g,h)\in R$，以 $z_0=(u_0,v_0)$ 表示 ∂R 上与 z 最近之点，即

$$d(z,z_0)=\inf_{\tilde{z}\in\partial R}d(z,\tilde{z}),$$

其中 d 表欧氏距离. 故如 $z > z_2$，则 $z_0 = z_2$；如 $z < z_1$，则 $z_0 = z_1$.

定理 2.1 设 $z = (g,h) \overline{\in} R$，又 $z > z_1$ 或 $z < z_1$，则

(i) $P(X(z) \leqslant a | \mathscr{F}_R) = P(X(z) \leqslant a | X(z_0))$ $(a.s.)$；

$$(2.1)$$

(ii) 当 $X(z_0) = x$ 时，$X(z)$ 有正态分布 $N(b, f^2)$.

如 $z > z_1$，则

$$b = e^{-\alpha(g-u_0)-\beta(h-v_0)}x, \tag{2.2}$$

$$f^2 = \sigma^2 e^{-2\alpha g - 2\beta h} M(R_z \backslash R_{z_0}); \tag{2.3}$$

如 $z < z_1$，则 b, f^2 可由(1.10)式求出，此时

$$EX(z)X(z_0)$$

$$= e^{-\alpha(g+u)-\beta(h-v)}\left[EX_0^2 + \frac{\sigma^2}{4\alpha\beta}(e^{2\alpha g} - 1)(e^{2\beta h} - 1)\right]. \tag{2.4}$$

证 如 $z \overline{\in} R, z > z_1$，由(1.2)式

$$\begin{aligned} X(z) &= e^{-\alpha(g-u_0)-\beta(h-v_0)}X(z_0) + \sigma e^{-\alpha g - \beta h} I(R_z \backslash R_{z_0}) \\ &= \Sigma_1 + \Sigma_2 (\text{设}). \end{aligned} \tag{2.5}$$

仿定理 1.1(i) 之证即得(2.1)、(2.2)、(2.3) 式.

如 $z < z_1$，此时 $z_0 = z_1$. 令 $\mathscr{F}_z = \sigma\{X(y), y \leqslant z\}$，$\mathscr{F}^z = \sigma\{X(y), y \geqslant z\}$. 由文献[1] 中定理 2.1，$\mathscr{F}_{z_1}$，$\mathscr{F}^{z_1}$ 关于 $\sigma\{X(z_1)\}$ 条件独立，从而 $\mathscr{F}_{z_1}$，$\mathscr{F}_R (\subset \mathscr{F}^{z_1})$ 也关于 $\sigma\{X(z_1)\}$ 条件独立. 由于 $\sigma\{X(z_1)\} \subset \mathscr{F}_R$，$(X(z) \leqslant a) \in \mathscr{F}_{z_1}$，故

$$\begin{aligned} P(X(z) \leqslant a | \mathscr{F}_R) &= P(X(z) \leqslant a | \mathscr{F}_R \vee \sigma\{X(z_1)\} \\ &= P(X(z) \leqslant a | X(z_1)) = P(X(z) \leqslant a | X(z_0)), (a.s.). \end{aligned}$$

(2.4) 式由(1.13) 式得到. ∎

21.3 预测问题

今讨论预测问题，设 $A \subset R_+^2$，$z \overline{\in} A$. 令

$$L^2(A) = \{h(\omega): h \text{ 为 } \mathscr{F}_A \text{ 可测}, E|h|^2 < \infty\},$$

欲求 $l(z, A) \in L^2(A)$，使

$$E|X(z)-l(z,A)|^2=\inf_{h\in L^2(A)} E|X(z)-h|^2,$$

称 $l(z,A)$ 为 $X(z)$ 关于 $\{X(y),y\in A\}$ 的预测量，预测误差定义为

$$\varepsilon(z,A)=E|X(z)-l(z,A)|^2.$$

由于 X 为正态过程，$l(z,A)$ 重合于线性预测.

下列引理的证明很简单，故从略.

引理 3.1 设 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_k)$、$\eta=(\eta_1,\cdots,\eta_n)$ 为独立随机向量，f,g 为二 Borel 可测函数.

$$E|f(\xi)|<\infty,E|g(\eta)|<\infty.$$

如 $\zeta=f(\xi)+g(\eta)$，则

$$E(\zeta|\xi)=f(\xi)+Eg(\eta). \tag{3.1}$$

再如 $E|f(\xi)g(\eta)|<\infty,\zeta=f(\xi)g(\eta)$，则

$$E(\zeta|\xi)=f(\xi)\cdot Eg(\eta). \tag{3.2}$$

今分别考虑定理 1.1 中的 K 及定理 2.1 中的 R，并用那里的记号.

定理 3.1 (i) 设 $z=(s,t)\overline{\in} K$，则

$$l(z,K)=\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i e^{-\alpha(s-u_i)-\beta(t-v_i)}X(z_i), \tag{3.3}$$

$$\varepsilon(z,K)=\Sigma^2 \quad (\text{见}(1.7)\text{式}); \tag{3.4}$$

(ii) 设 $z=(g,h)\overline{\in} R,z>z_1$，则

$$l(z,R)=e^{-\alpha(g-u_0)-\beta(h-v_0)}X(z_0), \tag{3.5}$$

$$\varepsilon(z,R)=f^2 \quad (\text{见}(2.3)\text{式}); \tag{3.6}$$

证 周知 $l(z,A)=E(X(z)|\mathscr{F}_A),z\overline{\in} A$. 由(1.5)式

$$\begin{aligned} l(z,K)&=E(X(z)|\mathscr{F}_K)\\ &=E(X(z)|X(z_i),i=0,1,\cdots,n+1), \end{aligned}$$

对(1.8)式应用引理 3.1，因为 $(X(z_0),\cdots,X(z_{n+1}))$ 与 $I(R_z\backslash K)$ 独立，又 $EI(R_z\backslash K)=0$，故由(1.8)及(3.1)式即得(3.3)式. 再由(1.8)式

$$\begin{aligned} \varepsilon(z,K)&=E|X(z)-l(z,K)|^2\\ &=\sigma^2 e^{-2\alpha s-2\beta t}E|I(R_z\backslash K)|^2=\Sigma^2. \end{aligned}$$

类似地，由(2.5)式可证明(ii). ∎

注 3.1 转移概率 $P(X(z)\leqslant a|\mathscr{F}_A)$不仅依赖于 A,而且依赖于 z 的位置. 在定理 2.1 中,我们已知在那里的条件下,它只是一个变量 $X(z_0)$的函数. 但如 $z\overline{\in}R$,既非 $z>z_1$ 又非 $z<z_1$,它可能较复杂. 可以想象,当 A 为有限多个矩形的和时,情况当更复杂[2];但对某些 z,我们的方法仍然有效.

参考文献

[1] 王梓坤. 二参数 Ornstein-Uhlenbeck 过程. 数学物理学报,1983,3(4):395～406

[2] Korezlioglu H. ,Lefort P. Une propriete Markovienne pour les processus a deux indies. C. R. Acad. Sci. Paris ,Ser. A ,1980,290:555～558

第22篇 多参数无穷维 OU过程与布朗运动

22.1 OUP_n^∞ 和 BM_n^∞ 的定义

设 R^n 为 n 维实欧氏空间，$R_+^n=\{t:t=(t_1,\cdots,t_n)$，每 $t_i\geqslant 0\}$. $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为概率空间，$\Omega=(\omega)$. F 为全体实值函数 $f(s),s\geqslant 0$（或 $s\in[0,d],d<\infty$）之集，$\mathscr{B}_F$ 为 F 中子集 σ- 代数，由全体有限维 Borel 柱集所产生. 如对每 $t\in R_+^n$，存在 $(\Omega,\mathscr{F})\to(F,\mathscr{B}_F)$ 随机元 $x_t:=x_t(\omega)$，则称 $X=\{x_t,t\in R_+^n\}$ 为 n 参数无穷维随机过程. 当 t 固定时，x_t 是参数为 $s\geqslant 0$ 的随机过程，故可记 x_t 为 x_t^s 或 $\{x_t(s),s\geqslant 0\}$；而当 t 及 s 皆固定时，$x_t(s)$ 是实值随机变数.

称 X 为 n 参数无穷维正态过程，如对任意有限多个 $t_i\in R_+^n$，任意有限多个 $s_{ij}\geqslant 0$，

$$\{x_{t_i}(s_{ij}):i=1,\cdots,l;j=1,\cdots,m_i\}$$

是 $\sum_{i=1}^{l} m_i$ 维正态随机向量.

称 X 为 n 参数无穷维 OU（Ornstein-Uhlenbeck）过程，记为 OUP_n^∞，如它是正态的，而且对每固定的 $t\in R_+^n$，$\{x_t(s),s\geqslant 0\}$ 等价于（即有相同的有限维分布）某 OUP_1^1. 后者是单参数一维 OU 过程 $\{x(s),s\geqslant 0\}$，其中

$$x(s)=\mathrm{e}^{-\alpha s}\left[x_0+A\int_0^s \mathrm{e}^{\alpha a}B(\mathrm{d}a)\right] \tag{1.1}$$

常数 $\alpha>0$，而常数 $A>0$ 称为此过程的扩散系数. 一般地，OUP_{n+1}^{1} $\{x(s,\boldsymbol{t}),(s,\boldsymbol{t})\in R_+^{n+1}\}$ 的定义是

$$x(s,\boldsymbol{t})=\mathrm{e}^{-\alpha s-\boldsymbol{\beta t}}\left[x_0+\sigma\int_0^s\int_0^{\boldsymbol{t}} \mathrm{e}^{\alpha a+\boldsymbol{\beta b}}B(\mathrm{d}a,\mathrm{d}\boldsymbol{b})\right], \tag{1.2}$$

其中 $\alpha>0,\beta_i>0$ 为常数，$\boldsymbol{\beta}=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$，$\boldsymbol{\beta b}=\sum_{i=1}^{n}\beta_i b_i$，对 $\mathrm{d}\boldsymbol{b}$ 的积分是 n 重的；B 为 $n+1$ 参数布朗运动 BM_{n+1}^{1}，它是正态过程，$EB(a,\boldsymbol{b})=0$，又

$$EB(a,\boldsymbol{b})B(a',\boldsymbol{b}') = K^2(a\wedge a')\prod_{i=1}^{n}(b_i\wedge b'_i). \tag{1.3}$$

$a\wedge a'=\min(a,a')$，$K>0$ 称为 B 的扩散系数，但对(1.2)中的 B 取 $K=1$；x_0 或为常数，或为与 B 独立的正态随机变数.

今通过 OUP_{n+1}^{1} 来定义 $\mathrm{OUP}_{n}^{\infty}$：对 $\boldsymbol{t}\in R_+^n$，令

$$x_{\boldsymbol{t}}(s)=x(s,\boldsymbol{t}) \tag{1.4}$$

$\{x_{\boldsymbol{t}}^{\cdot},\boldsymbol{t}\in R_+^n\}$ 是 $\mathrm{OUP}_{n}^{\infty}$，$(x_{\boldsymbol{t}}^{\cdot}:=x_{\boldsymbol{t}}(\cdot))$，因为，它显然是正态的，当 $\boldsymbol{t}$ 固定时，它等价于某 OUP_{1}^{1}([1,2,3,4]). 本篇只讨论由(1.4)及(1.2)定义的 $\mathrm{OUP}_{n}^{\infty}$.

22.2 在 Wiener 空间中的分布

固定 $\boldsymbol{t}$，$x(s,\boldsymbol{t})$ 对 $s\geqslant 0$ 连续，故每 $x_{\boldsymbol{t}}$ 是 Wiener 空间 $(W,\mathscr{B}_W)$ 中的随机元. $x_{\boldsymbol{t}}^{\cdot}$ 在 $(W,\mathscr{B}_W)$ 中的分布记为 $\mu_{\boldsymbol{t}}$.

同样，可通过上述 $n+1$ 参数布朗运动 BM_{n+1}^{1} 来定义 n 参数无穷维布朗运动(BM_{n}^{∞})$\{B_{\boldsymbol{t}}^{\cdot},\boldsymbol{t}\in R^n\}$：

$$B_{\boldsymbol{t}}(s)=B(s,\boldsymbol{t}). \tag{2.1}$$

由(1.3)知固定 $\boldsymbol{t}$ 时，$\{B_{\boldsymbol{t}}(s),s\geqslant 0\}$ 是单参数一维布朗运动 BM_{1}^{1}，相关函数为

$$EB_{\boldsymbol{t}}(u)B_{\boldsymbol{t}}(v)=K^2t_1\cdots t_n\cdot(u\wedge v). \tag{2.2}$$

$B_t^{\cdot}$ 在 Wiener 空间中的分布记为 ν_t.

本篇的目的主要是研究 μ_t、ν_t 的绝对连续性及其支集.

定理 2.1 固定 t,下列四随机元在 Wiener 空间中同分布:

(i)$x_t^{\cdot}$:$x_t(s)$由(1.4)(1.2)定义;

(ii)$y_t^{\cdot}$: $y_t(s)=\mathrm{e}^{-\alpha s}\left[\mathrm{e}^{-\beta t}x_0+\sigma\prod_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{1-\mathrm{e}^{-2\beta_i t_i}}{2\beta_i}}\int_0^s \mathrm{e}^{\alpha a}\mathrm{d}B(a)\right]$,

B 为 BM_1^1;

(iii)$z_t^{\cdot}$: $z_t(s)=\mathrm{e}^{-\alpha s}\left[\mathrm{e}^{-\beta t}x_0+\sigma\prod_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{1-\mathrm{e}^{-2\beta_i t_i}}{2\beta_i}}B\left(\frac{\mathrm{e}^{2\alpha s}-1}{2\alpha}\right)\right]$,

B 为 BM_1^1;

(iv)$u_t^{\cdot}$: $u_t(s)=\mathrm{e}^{-\alpha s-\beta t}\left[x_0+\sigma B_{t'}\left(\frac{\mathrm{e}^{2\alpha s}-1}{2\alpha}\right)\right]$,$\{B_t^{\cdot}\}$为 BM_n^{∞},

$K=1$,$t_i'=(\mathrm{e}^{2\beta_i t_i}-1)/2\beta_i$.

证 此四随机元皆正态,有相同均值 $\mathrm{e}^{-\alpha s-\beta t}Ex_0$. $x_t^{\cdot}$ 的相关函数为

$$\begin{aligned}
R_t(u,v) &= Ex_t(u)x_t(v)\\
&= \mathrm{e}^{-\alpha(u+v)-2\beta t}\left\{Ex_0^2+\sigma^2E\left[\int_0^u\int_0^t \mathrm{e}^{\alpha a+\boldsymbol{\beta b}}B(\mathrm{d}a,\mathrm{d}\boldsymbol{b})\right.\right.\\
&\quad\left.\left.\cdot\int_0^v\int_0^t \mathrm{e}^{\alpha a+\boldsymbol{\beta b}}B(\mathrm{d}a,\mathrm{d}\boldsymbol{b})\right]\right\}\\
&= \mathrm{e}^{-\alpha(u+v)-2\beta t}\left\{Ex_0^2+\sigma^2\int_0^{u\wedge v}\mathrm{e}^{2\alpha a}\mathrm{d}a\int_0^t \mathrm{e}^{2\boldsymbol{\beta b}}\mathrm{d}\boldsymbol{b}\right\}\\
&= \mathrm{e}^{-\alpha(u+v)}\left\{\mathrm{e}^{-2\beta t}Ex_0^2+\sigma^2\frac{\mathrm{e}^{2\alpha(u\wedge v)}-1}{2\alpha}\prod_{i=1}^{n}\frac{1-\mathrm{e}^{-2\beta_i t_i}}{2\beta_i}\right\}.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

类似计算,知上述四随机元有相同的相关函数(2.3),故同分布,详情从略. ∎

众所周知,对同一空间中二正态分布 μ 与 ν 只有两种可能:或者相互绝对连续,记为 $\mu\Leftrightarrow\nu$;或者相互奇异,亦称互垂,记为 $\mu\perp v$.

考虑集 $S(r)$及 $B(r)$:

$$S(r):=\left\{f:f\in W,\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2^n}\left|f\left(\frac{k}{2^n}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.-f\left(\frac{k-1}{2^n}\right)\right|^2=r^2\right\}, \tag{2.4}$$

$$B(r):=\left\{f:f\in W,\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2^n}\left|f\left(\frac{k}{2^n}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.-f\left(\frac{k-1}{2^n}\right)\right|^2\leqslant r^2\right\}, \tag{2.5}$$

分别称 $S(r)$与 $B(r)$为 W 中半径为 $r>0$ 的球面与球.

本篇以下,特别在定理 2.2—2.5 中,皆设 $s\in[0,d]$,$d<\infty$.

定理 2.2 设 $Ex_0=0$,固定 t 及 t'.

(i) $\mu_t\Leftrightarrow\mu_{t'}$之充要条件为

$$\prod_{i=1}^{n}(1-\mathrm{e}^{-2\beta_i t_i})=\prod_{i=1}^{n}(1-\mathrm{e}^{-2\beta_i t'_i}). \tag{2.6}$$

(ii) μ_t 集中在球面 $S(A_t)$ 上,$\mu_t(S(A_t))=1$,这里

$$A_t=\sigma\prod_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{1-\mathrm{e}^{-2\beta_i t_i}}{2\beta_i}}; \tag{2.7}$$

亦即

$$\mu_t\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2^n}\left|x_t\left(\frac{k}{2^n}\right)-x_t\left(\frac{k-1}{2^n}\right)\right|^2=A_t^2\right)=1. \tag{2.8}$$

(iii) 如 $n=1$,则一切 $\mu_t(t>0)$皆互垂.

证 考虑(1.1)中的 OUP_1^1,$\{x(s),s\geqslant0\}$,不难算出其相关函数为

$$R(u,v)=Ex(u)x(v)=\mathrm{e}^{-\alpha(u+v)}\left[Ex_0^2+A^2\frac{\mathrm{e}^{2\alpha(u\wedge v)}-1}{2\alpha}\right],$$
$$p(u):=\lim_{v\downarrow u}\frac{\partial R(u,v)}{\partial u}=\frac{A^2}{2}(1+\mathrm{e}^{-2\alpha u})-\alpha\mathrm{e}^{-2\alpha u}Ex_0^2,$$
$$q(u):=\lim_{v\uparrow u}\frac{\partial R(u,v)}{\partial u}=-\frac{A^2}{2}(1-\mathrm{e}^{-2\alpha u})-\alpha\mathrm{e}^{-2\alpha u}Ex_0^2,$$
$$D(u):=p(u)-q(u)=A^2,u>0. \tag{2.9}$$

称 $D(u)$为过程$\{x(s)\}$的示性函数,它恰好等于扩散系数 A 的平方,而不依赖于 α 及 x_0.

$x'_t=\{x_t(s),s\geqslant 0\}$ 是 OUP_1^1,由定理 2.1(ii),其扩散系数为 A_t,因而它的示性函数为

$$D_t(u)=A_t^2=\sigma^2\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1-e^{-2\beta_i t_i}}{2\beta_i}\right). \tag{2.10}$$

由假设 $Ex_0=0$ 得 $Ex_t(s)=Ex_{t'}(s)=0$. 由(2.3)知 $R_t(0,0)$ 与 $R_{t'}(0,0)$ 或同时为 0,或同时不为 0. 于是由[5,定理 5.2.6]知 $\mu_t\Leftrightarrow\mu_{t'}$ 之充要条件是 x'_t 与 $x'_{t'}$ 的示性函数 $D_t(u)$ 与 $D_{t'}(u)$ 几乎处处(关于 Lebesgue 测度)相等,亦即(2.6)成立.

其次,由 Baxter 定理[6,定理 20.4],μ_t 集中在半径之平方为

$$\int_0^1 D_t(u)\mathrm{d}u=A_t^2$$

之球面上,此得证(ii).

最后,当 $n=1$ 时,如 t,t' 满足(2.6),则 $t=t'$;故如 $t\neq t'$,必有 $\mu_t\perp\mu_{t'}$

以 $\langle\mu\rangle$ 表测度 μ 之支集(Support). 由(2.10)

$$A_t^2\leqslant\sigma^2\Big/\prod_{i=1}^{n}(2\beta_i).$$

于是得

系 2.1 $$\bigcup_{t\in R_+^n}\langle\mu\rangle\subset\bigcup_{t\in R_+^n}S(A_t)\subset B\left(\sigma\Big/\sqrt{\prod_{i=1}^{n}(2\beta_i)}\right).$$

这表示 OUP_n^∞ 全部分布范围有界,以概率 1 不超出半径为 $\sigma\Big/\sqrt{\prod_{i=1}^{n}(2\beta_i)}$ 的球;这与 BM_n^∞ 不同(见定理 2.3).

注 2.1 R_+^n 中集 $A(a):=(t:A_t^2=a^2)$ 对应于球面 $S(a)\subset W$:

$$A(a)\to S(a);0<a<\sigma\Big/\sqrt{\prod_{i=1}^{n}(2\beta_i)}.$$

当 $n>1$ 时,$A(a)$ 含许多点 t,定理 2.2 表示,它们所对应的许多 $\mu_t(t\in A(a))$ 皆集中在同一球面 $S(a)$ 上. 这与 $n=1$ 不同,此时 $A(a)$ 只含一点. 直观上可想象 $A(a)$ 为 a-水平面. 密度 $\mathrm{d}\mu_t/\mathrm{d}\mu_{t'}$ 可

用[8]中方法求出.

下面讨论 BM_n^∞, $\{B_t^\cdot, t\in R_+^n\}$, 它由(2.1)定义. 对固定 t, $\{B_t(s)\}$是 BM_1^1, 相关函数为

$$EB_t(u)B_t(v)=K^2t_1\cdots t_n\cdot(u\wedge v).$$

仿(2.9), 示性函数为

$$D_t(u)=K^2t_1\cdots t_n.$$

下列定理可参照定理 2.2 证明, 故证明从略.

定理 2.3 对 BM_n^∞, 固定 t 与 t',

(i) $\nu_t\Leftrightarrow\nu_{t'}$ 的充要条件是

$$t_1\cdots t_n=t_1'\cdots t_n';$$

(ii) $\nu_t\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2^n}\left|B_t\left(\frac{k}{2^n}\right)-B_t\left(\frac{k-1}{2^n}\right)\right|^2=K^2t_1\cdots t_n\right)=1$;

(iii) 如 $n=1$, 一切 ν_t, $(t\geqslant 0)$互垂.

注 2.2 与注 2.1 类似, 令 $c(a)=(t:t_1\cdots t_n=a^2)$, 则一切 $\nu_t(t\in c(a))$皆集中在同一球面 $S(Ka)$上, $a>0$. 但没有与系 2.1 中后一结论相似的结果.

定理 2.4 设(1.2)中 $x_0=0$, 则 $\mu_t\Leftrightarrow\nu_{t'}$之充要条件为

$$\sigma^2\prod_{i=1}^n\left(\frac{1-e^{-2\beta_it_i}}{2\beta_i}\right)=K^2t_1'\cdots t_n'.$$

特别, 如 $n=\sigma=K=1$, 则 $\mu_t\perp\nu_t$, $t>0$.

以上皆设 $n\geqslant 1$; 为完整计算再讨论 $n=0$ 的情形. 由于 $R_+^0=\varnothing$(空), 我们约定 0 参数无穷维过程即为单参数一维过程. 考虑(1.1)中的 OUP_1^1 及 BM_1^1, 后者的相关函数为 $K^2(u\wedge v)$、示性函数为 K^2. OUP_1^1 在 Wiener 空间中的分布依赖于 x_0、α 及 A, 故应记为 $\mu_{x_0,\alpha,A}$; 而 BM_1^1 的分布则应记为 ν_K. 回忆 OUP_1^1 之示性函数为 A^2, (见(2.9)).

定理 2.5

(i) 设 $Ex_0=Ex_0'=0$, 则 $\mu_{x_0,\alpha,A}\Leftrightarrow\mu_{x_0',\alpha',A'}$ 的充要条件为 $A=A'$;

(ii) 如 $K\neq K'$, 则 $\nu_K\perp\nu_{K'}$;

(iii) 设 $x_0=0$，则 $\mu_A \Leftrightarrow \nu_K$ 之充要条件为 $A=K$.

关于 $OUP_1^{(\infty)}$ 之研究尚有[7]，但定义不同.

参考文献

[1] 王梓坤. 二参数 Ornstein-Uhlenbeck 过程. 数学物理学报，1983，3(4)：395～406

[2] 王梓坤. 二参数 Ornstein-Uhlenbeck 过程的转移概率及预测. 科学通报，1986，23：1761～1764

[3] 薛行雄. 二参数 Ornstein-Uhlenbeck 过程的奇点的蔓延. 应用概率统计，1985，1(1)：53～57

[4] 廖昭懋. n 参数 Ornstein-Uhlenbeck 过程. 北京师范大学学报（自然科学），1989，13～20

[5] 夏道行. 无限维空间上测度和积分论（上册）. 上海科技出版社，1965.

[6] Yeh J. Stochastic processes and the Wiener Integral. Marcel Dekker Inc.，1973.

[7] Ito K. Infinite Dimensional Ornstein-Uhlenbeck processes. Taniguchi Symp. SA. Katata，1982，197～224

[8] Dale E. Varberg，On equivalence of Gaussian measures. Pacific Journal of Mathematics，1961，11(2)：751～762

第23篇　多参数无穷维 (r,δ)-OU过程

设$(W,\mathscr{B}_W)$为 Wiener 空间，$W=C([0,1],R)$为定义在$[0,1]$上全体实值连续函数之集，$\mathscr{B}_W$ 为 W 中全体柱集所产生的 σ-代数. R^n 为 n 维欧氏空间，$R^n_\delta:=(\boldsymbol{t}:\boldsymbol{t}=(t_1,\cdots,t_n)$，每 $t_i>\delta_i)$. 设对每 $\boldsymbol{t}\in R^n_\delta$ 存在取值于 W 中的随机变量 $X_t(\cdot)$. 称$\{X_t(\cdot),\boldsymbol{t}\in R^n_\delta\}$为$(r,\boldsymbol{\delta})$-OU$P^{\infty}_{n}$，如

$$X_t(\cdot)=\mathrm{e}^{-\alpha t-\boldsymbol{\beta t}}\left[X_r+\sigma\int_r^t\int_\delta^t\mathrm{e}^{\alpha a+\boldsymbol{\beta b}}\boldsymbol{B}(\mathrm{d}a,\mathrm{d}\boldsymbol{b})\right],\tag{1}$$

其中“·”表示$[0,1]$中的流动变量，$a\in R$，$\boldsymbol{b}\in R^n$，$\alpha>0$，$\sigma>0$，$r\leqslant0$为已给常数(r 可为$-\infty$)，$\boldsymbol{\beta}=(\beta_1,\cdots,\beta_n)(\beta_i>0)$及 $\boldsymbol{\delta}=(\delta_1,\cdots,\delta_n)(-\infty\leqslant\delta_i\leqslant0)$为已给 n 维向量，$\boldsymbol{\beta t}=\sum_{i=1}^n\beta_it_i$. $\{\boldsymbol{B}(A),A\in\mathscr{B}^{n+1}\}$为定义在某概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的白噪声(white noise)[1,2]，它是 R^{n+1}中 Borel σ-代数 $\mathscr{B}^{n+1}$上的随机集函数，满足条件：$\boldsymbol{B}(A)$为 $N(0,L(A))$正态变量，L 为 $n+1$ 维勒贝格测度；如 $A\cap C=\varnothing$，$\boldsymbol{B}(A)$与 $\boldsymbol{B}(C)$独立而且 $\boldsymbol{B}(A\cup C)=\boldsymbol{B}(A)+\boldsymbol{B}(C)$. X_r 为与$\{\boldsymbol{B}(A)\}$独立均值为 0 的正态随机变量；如 $r=-\infty$，则取 $X_{-\infty}=0$. 由于 $\boldsymbol{B}(A):=\boldsymbol{B}(A,\omega)$，$\omega\in\Omega$，故 $X_t(\cdot)=X_t(\cdot,\omega)$. 当 $\boldsymbol{t},\omega$ 固定时，$X_t(\cdot,\omega)$是 $\cdot\in[0,1]$上的连续函数. $X_t(\cdot)$在$(W,\mathscr{B}_W)$上的分布记为 μ_t.

在文献[3]中研究了 $r=0$，$\boldsymbol{\delta}=\boldsymbol{0}=(0,\cdots,0)_n$ 的特殊情形，那里证明了 μ_t 的分层绝对连续性：即当 $\boldsymbol{t},\boldsymbol{t}'$ 属于同一层(集)时，μ_t 与

$\mu_{t'}$相互绝对连续(记为 $\mu_t \Leftrightarrow \mu_{t'}$). 本篇推广了上述结论,发现绝对连续性紧密联系于 δ. 如取 $\boldsymbol{\delta} = -\boldsymbol{\infty} = (-\infty, \cdots, -\infty)_n$,则分层性消失,此时一切 $\mu_t(\boldsymbol{t} \neq \boldsymbol{\delta})$相互绝对连续;如再进一步设 $r = -\infty$,则 $\mu_t = \mu$ 实际上不依赖于 $\boldsymbol{t}(\neq \boldsymbol{\delta})$. 本篇还证明了:当 $|\boldsymbol{t}| \to \infty$时,式(1)中 X_t 之分布弱收敛;而且若一切 $t_i \to \infty, r = -\infty$,则此极限分布就是上述的 μ.

引理 1 对固定的 $\boldsymbol{t} \in R_\delta^n$,过程 $X_t(s)(s > r)$的相关函数为

$$R_t(u,v) := EX_t(u)X_t(v) = \mathrm{e}^{-\alpha(u+v)-2\beta t}EX_r^2$$

$$+ \sigma^2 \frac{\mathrm{e}^{-\alpha|u-v|} - \mathrm{e}^{-\alpha(u-v-2r)}}{2\alpha} \prod_{i=1}^n \frac{1 - \mathrm{e}^{-2\beta_i(t_i - \delta_i)}}{2\beta_i}. \qquad (2)$$

证

$$R_t(u,v) = \mathrm{e}^{-\alpha(u+v)-2\beta t} E\left\{\left[X_r + \sigma\int_r^u\int_\delta^t\right]\left[X_r + \sigma\int_r^v\int_\delta^t\right]\right\}, \qquad (3)$$

其中

$$\int_r^u\int_\delta^t := \int_r^u\int_\delta^t \mathrm{e}^{\alpha a + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{b}} \boldsymbol{B}(\mathrm{d}a, \mathrm{d}\boldsymbol{b}).$$

由于 X_r 与$\{\boldsymbol{B}(A)\}$独立,故

$$E\left(X_r\int_r^v\int_\delta^t\right) = EX_r \cdot E\int_r^v\int_\delta^t = 0; \ E\left(X_r\int_r^u\int_\delta^t\right) = 0. \qquad (4)$$

设 $u \leqslant v$,

$$E\left(\int_r^u\int_\delta^t \cdot \int_r^v\int_\delta^t\right) = E\left[\int_r^u\int_\delta^t \cdot \left(\int_r^u + \int_u^v\right)\int_\delta^t\right],$$

$$E\left(\int_r^u\int_\delta^t \cdot \int_u^v\int_\delta^t\right)$$

$$= E\left[\int_r^v\int_\delta^t I_a[r,u]\mathrm{e}^{\alpha a + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{b}}\boldsymbol{B}(\mathrm{d}a, \mathrm{d}\boldsymbol{b}) \cdot \int_r^v\int_\delta^t I_a[u,v]\mathrm{e}^{\alpha a + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{b}}\boldsymbol{B}(\mathrm{d}a, \mathrm{d}\boldsymbol{b})\right]$$

$$= \int_r^v\int_\delta^t I_a[r,u]I_a[u,v]\mathrm{e}^{2\alpha a + 2\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{b}}\mathrm{d}a\mathrm{d}\boldsymbol{b} = 0,$$

其中 I_a 表示性函数,故

$$E\left(\int_r^u\int_\delta^t \cdot \int_r^v\int_\delta^t\right) = E\left(\int_r^u\int_\delta^t \cdot \int_r^u\int_\delta^t\right) = \int_r^u\int_\delta^t \mathrm{e}^{2\alpha a + 2\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{b}}\mathrm{d}a\mathrm{d}\boldsymbol{b}$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{2\alpha u} - \mathrm{e}^{2\alpha r}}{2\alpha} \prod_{i=1}^n \frac{\mathrm{e}^{2\beta_i t_i} - \mathrm{e}^{2\beta_i \delta_i}}{2\beta_i}. \qquad (5)$$

由式(3)～(5)得

$$R_t(u,v)=e^{-\alpha(u+v)-2\beta t}\left\{EX_r^2+\sigma^2\frac{e^{2\alpha u}-e^{2\alpha r}}{2\alpha}\prod_{i=1}^{n}\frac{e^{2\beta_i t_i}-e^{2\beta_i\delta_i}}{2\beta_i}\right\},$$

此即式(2). 如 $v\leqslant u$，同样可得式(2). ∎

今将参数空间 R_δ^n 分解为诸"层"之和：$R_\delta^n=\bigcup\limits_{0<l\leqslant 1}G_\delta^l$，其中"层"

$$G_\delta^l=\left\{s:s\in R_\delta^n,\prod_{i=1}^{n}(1-e^{-2\beta_i(s_i-\delta_i)})=l\right\}. \tag{6}$$

考虑 W 中"半径为 $r>0$ 的球面 $S(r)$"与"球 $B(r)$"：

$$S(r)=\left\{f:f\in W,\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{2^m}\left|f\left(\frac{k}{2^m}\right)-f\left(\frac{k-1}{2^m}\right)\right|^2=r^2\right\},$$

$$B(r)=\bigcup_{0\leqslant u\leqslant r}S(u).$$

定理 1 对固定的 $t\in R_\delta^n$，$t'\in R_\delta^n$，$t\neq\delta$，$t'\neq\delta$，$\mu_t\Leftrightarrow\mu_{t'}$ 的充要条件是：存在 $0<l\leqslant 1$，使 t,t' 属于同一 G_δ^l，亦即

$$\prod_{i=1}^{n}(1-e^{-2\beta_i(t_i-\delta_i)})=\prod_{i=1}^{n}(1-e^{-2\beta_i(t'_i-\delta_i)})=l, \tag{7}$$

此时 $\mu_t(X_t(\cdot)\in S(A_{t,\delta}))=1$，$i.e.$

$$\mu_t\left(\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{2^m}\left|X_t\left(\frac{k}{2^m}\right)-X_t\left(\frac{k-1}{2^m}\right)\right|^2=A_{t,\delta}^2\right)=1, \tag{8}$$

这里

$$A_{t,\delta}^2:=\sigma^2\prod_{i=1}^{n}\frac{1-e^{2\beta_i(t_i-\delta_i)}}{2\beta_i}=\sigma^2 l\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{2\beta_i}. \tag{9}$$

证 简记 $D=e^{-2\beta t}EX_r^2$. 改写式(2)为

$$R_t(u,v):=De^{-\alpha(u+v)}+A_{t,\delta}^2\frac{e^{-\alpha|u-v|}-e^{-\alpha(u+v-2r)}}{2\alpha}. \tag{10}$$

计算

$$p_t(u):=\lim_{v\downarrow u}\frac{\partial R_t(u,v)}{\partial u}=-\alpha De^{-2\alpha u}+A_{t,\delta}^2\frac{1+e^{-2\alpha(u-r)}}{2},$$

$$q_t(u):=\lim_{v\uparrow u}\frac{\partial R_t(u,v)}{\partial u}$$

$$= -\alpha D e^{-2\alpha u} + A_{t,\delta}^2 \frac{-1+e^{-2\alpha(u-r)}}{2}.$$

$$D_t(u) := p_t(u) - q_t(u) = A_{t,\delta}^2.$$

t, t' 属于同一 G_δ^l 等价于

$$D_t(u) = D_{t'}(u) = \sigma^2 l \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2\beta_i}. \tag{11}$$

由假设 $EX_r = 0$ 及式(1)知 $EX_t(s) = EX_{t'}(s) = 0, (s \geqslant r)$. 由式(2)知 $R_t(0,0)$ 与 $R_{t'}(0,0)$ 或同时为 0,或同时不为 0. 由文献[4]定理 5.2.6 知 $\mu_t \Leftrightarrow \mu_{t'}$ 等价于 $D_t(u) = D_{t'}(u)$,于是得证定理第一结论. 又由文献[5]定理 20.4,μ_t 集中在半径为$\int_0^1 D_t(u)\mathrm{d}u = A_{t,\delta}^2$ 之"球面"上,此得式(8),(9). ∎

由式(8)知 μ_t 之支集 $\mathrm{supp}(\mu_t) \subset S(A_{t,\delta})$,故

$$\bigcup_{t>\delta} \mathrm{supp}(\mu_t) \subset B\left(\sigma \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\beta_i}}\right).$$

如 $n=1, \delta \neq -\infty$,则 μ_t 与 $\mu_{t'}$ 互为奇异$(t \neq t')$,即,$\mu_t \perp \mu_{t'}$,此因 $1 - e^{-2\beta(t-\delta)} = l (l \neq 1)$ 对 t 只有唯一解,故 $\mu_t, \mu_{t'}$ 不可能相互绝对连续;又因 μ_t 和 $\mu_{t'}$ 是正态分布,故必 $\mu_t \perp \mu_{t'}$.

考虑下列 4 种特殊情况:

(a) $r = -\infty, \boldsymbol{\delta} = -\infty$;(b) $r = 0, \boldsymbol{\delta} = -\infty$;(c) $r = -\infty$, $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{0}$;(d) $r = 0, \boldsymbol{\delta} = \mathbf{0}$.

在情况(a),(b),由式(7)并取那里的 $l = 1$,对任 $t \neq \boldsymbol{\delta}, t' \neq \boldsymbol{\delta}$,$\mu_t \Leftrightarrow \mu_{t'}$;$\mu_t$ 集中在半径为 $\sigma \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\beta_i}}$ 之"球面"上,与 t 无关.

在情况(c),(d),分层绝对连续,即当 t, t' 属于同一 G_δ^l 时,$\mu_t \Leftrightarrow \mu_{t'}$,此时 μ_t 集中在半径为 $\sigma \prod_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{1-e^{-2\beta_i t_i}}{2\beta_i}} = \sigma\sqrt{l} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\beta_i}}$ 之"球面"上.

在情况 (a),(c),由假设 $X_{-\infty} = 0$ 及式 (2) 可见,$R_t(u,v)$

$= Ce^{-\alpha|u-v|}\left(\text{常数} C \text{分别为} \frac{\sigma^2}{2\alpha}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{2\beta_i} \text{及} \frac{\sigma^2}{2\alpha}\prod_{i=1}^{n}\frac{1-e^{-2\beta_i t_i}}{2\beta_i}\right)$. 此时 $X_t(\cdot)$ 是平稳过程，当然也是正态马尔可夫过程.

有趣的是在情况(a)，相关函数为

$$R_t(u,v) = \frac{\sigma^2}{2\alpha}\prod_{i=1}^{n}\frac{e^{-\alpha|u-v|}}{2\beta_i} \quad (u,v \in R), \tag{12}$$

与 t 无关. 注意 $EX_t(u)=0$，故由它在 W 上产生的分布 $\mu_t := \mu$ 也与 t 无关，即过程

$$X_t(\cdot) = \sigma e^{-\alpha\cdot-\beta t}\int_{-\infty}^{\cdot}\int_{-\infty}^{t} e^{\alpha a+\beta b}\boldsymbol{B}(da,d\boldsymbol{b}) \tag{13}$$

之分布 μ 与 $t\in R^n$ 无关.

系 1 对固定 $t\in R_\delta^n$，$\{X_t(u), u\geqslant r\}$ 与过程 $\{Y_t(u), u\geqslant r\}$ 同分布，其中

$$Y_t(u) = e^{-\alpha u}\left[e^{-\beta t}X_r + \sigma\prod_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{1-e^{-2\beta_i(t_i-\delta_i)}}{2\beta_i}}\int_r^u e^{\alpha a}dB(a)\right], \tag{14}$$

这是由于

$$\begin{aligned}&EY_t(u)Y_t(v)\\ &= e^{-\alpha(u+v)}\left\{e^{-2\beta t}EX_r^2 + \sigma^2\prod_{i=1}^{n}\frac{1-e^{-2\beta_i(t_i-\delta_i)}}{2\beta_i}\int_r^{u\wedge v}e^{2\alpha a}da\right\}\end{aligned}$$

与式(2)相同.

系 2 设 $t_i\to\infty (i=1,\cdots,n)$，则 $X_t(\cdot)\xrightarrow{\text{weak}}X(\cdot)$，$X(\cdot)$ 为取值于 Wiener 空间 W 中的正态随机元，又

$$EX(u) = 0,$$

$$EX(u)X(v) = \frac{\sigma^2}{2\alpha}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{2\beta_i}\left[e^{-\alpha|u-v|} - e^{-\alpha(u+v-2r)}\right], \tag{15}$$

如再设 $r=-\infty$，则 $X(\cdot)$ 化为均值为 0、相关函数为式(12)的正态过程 $X(s), s\in[0,1]$.

证 在式(2)中令一切 $t_i\to\infty$ 即得式(15). 故 $X_t(\cdot)$ 的有限维分布收敛于 $X(\cdot)$ 的有限维分布. 由式(2)还可见 $R_t(u,v)$ 关于正

t 为有界，又因 μ_t 为正态，故 $\{\mu_t\}$ 为胎紧(Tight)(参见文献[6，第41 页])，从而 $X_t(\cdot)\xrightarrow{\text{weak}}X(\cdot)$ 或 $\mu_t\xrightarrow{\text{weak}}\mu$($\mu$ 是 $X(\cdot)$ 在 W 中的分布).

■

现在考虑 d 维 Wiener 空间 $W^d=C([0,1],R^d)$. 取 d 个白噪声 $\boldsymbol{B}_i$ 及 d 个 0 均值正态随机变量 $X_r^{(i)}$($i=1,\cdots,d$；$X_{-\infty}^{(i)}=0$)，并设 $\{\boldsymbol{B}_i,X_r^{(i)},i=1,\cdots,\mathrm{d}\}$ 相互独立. 定义

$$X_t^{(i)}(\cdot)=\mathrm{e}^{-\alpha\cdot\ -\beta t}\left[X_r^{(i)}+\sigma\int_r^{\cdot}\int_\delta^t \mathrm{e}^{\alpha a+\beta b}\boldsymbol{B}_i(\mathrm{d}a,\mathrm{d}b)\right],\tag{16}$$

则 $Z_t(\cdot):=(X_t^{(1)}(\cdot),\cdots,X_t^{(d)}(\cdot))$ 为取值于 W^d 中的随机元. 称 $\{Z_t(\cdot),t\in R_\delta^n\}$ 为 n 参数 ∞^d 维 $(r,\boldsymbol{\delta})$-Ornstein-Uhlenbeck 过程(记为 $(r,\boldsymbol{\delta})$-OU$P_n^{\infty,d}$). 固定 t，记 $\bar{\mu}_t$ 为 $Z_t(\cdot)$ 在 W^d 中之分布. 由独立性

$$\bar{\mu}_t=\mu_t\times\cdots\times\mu_t:=\mu_t^n.\tag{17}$$

引理 2 设 P,Q 为可测空间 $(E,\mathscr{B})$ 上二有限测度，则 $P\Leftrightarrow Q$ 之充要条件为：对某正整数 n(或对一切正整数 n)，乘积测度 $P^n\Leftrightarrow Q^n$.

此引理由下列事实推出，后者由 λ-π 方法[7] 容易证明：如

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}Q}=f(x),$$

则

$$\frac{\mathrm{d}P^n}{\mathrm{d}Q^n}=\prod_{i=1}^n f(x_i),\ (x,x_i\in E);$$

反之如

$$\frac{\mathrm{d}P^n}{\mathrm{d}Q^n}=g(x_1,\cdots,x_n),$$

则

$$\frac{\mathrm{d}P^n}{\mathrm{d}Q^n}=\frac{f(x)}{(P(E))^{n-1}},$$

其中

$$f(x)=\int_E\cdots\int_E g(x,x_2,\cdots,x_n)Q(\mathrm{d}x_2)\cdots Q(\mathrm{d}x_n).$$

由定理 1 及引理 2 立得

定理 2 固定 $t \in R_\delta^n, t' \in R_\delta^n, t \neq \delta, t' \neq \delta$，则 $\bar{\mu}_t \Leftrightarrow \bar{\mu}_{t'}$ 之充要条件是

$$\prod_{i=1}^{n}(1-\mathrm{e}^{-2\beta_i(t_i-\delta_i)})=\prod_{i=1}^{n}(1-\mathrm{e}^{-2\beta_i(t'_i-\delta_i)}).$$

定理 3 设非空集 $A \subset (1,2,\cdots,n)$. 如 $t_i \to \infty (i \in A)$，则 $Z_t(\cdot) \xrightarrow{\text{weak}} Z(\cdot)$，这里 $Z(\cdot):=(X^{(1)}(\cdot),\cdots,X^{(d)}(\cdot))$ 为取值于 W^d 中的正态随机元.

$$EZ(u)=0,$$

$$E(Z'(u)Z(v))=E(X^{(k)}(u)X^{(l)}(v))$$

$$=\sigma^2\frac{\mathrm{e}^{-\alpha|u-v|}-\mathrm{e}^{-\alpha(u+v-2r)}}{2\alpha}\prod_{i\in A}\frac{1}{2\beta_i}\prod_{j\overline{\in} A}\frac{1-\mathrm{e}^{-2\beta_j(t_j-\delta_j)}}{2\beta_j}I_d.^{*} \tag{18}$$

其中 I_d 为 d 阶单位矩阵(δ_{ij}).

如进一步设 $A=(1,2,\cdots,n), r=-\infty$，则

$$E(Z'(u)Z(v))=\frac{\sigma^2}{2\alpha}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{2\beta_i}\mathrm{e}^{-\alpha|u-v|}I_d.$$

当 $d=1$ 时上式化为式(12).

证 $Z_t(\cdot)$ 为取值于 W^d 中的正态随机元，$EZ_t(u)=0$，协方差矩阵为

$$EZ'_t(u)Z_t(v)=(EX_t^{(k)}(u)X_t^{(l)}(v)):=(r_t^{k,l}(u,v)),$$

计算 $r_t^{k,l}(u,v)$ 之方法与式(2)同.

$$r_t^{k,l}(u,v)=E\Big\{\mathrm{e}^{-\alpha u-\beta t}\Big[X_r^{(k)}+\sigma\int_r^u\int_\delta^t \mathrm{e}^{\alpha a+\beta b}\boldsymbol{B}_k(\mathrm{d}a,\mathrm{d}\boldsymbol{b})\Big]\cdot$$

$$\mathrm{e}^{-\alpha v-\beta t}\Big[X_r^{(l)}+\sigma\int_r^v\int_\delta^t \mathrm{e}^{\alpha a+\beta b}\boldsymbol{B}_l(\mathrm{d}a,\mathrm{d}\boldsymbol{b})\Big]\Big\}.$$

由于$\{X_r^{(l)},\boldsymbol{B}_l(\cdot), l=1,\cdots,d\}$的独立性及 $EX_r^{(l)}=0$，可见当 $k\neq l$ 时，涉及积分的 3 项皆为 0，故

$$r_t^{k,l}(u,v)=A_tEX_r^{(k)}X_r^{(l)},$$

---

* $j\overline{\in} A$ 系指 $j\in(1,2,\cdots,n)-A$. —— 编者

其中 $A_t = e^{-\alpha(u+v)-2\beta t}$. 再记

$$\sum_{t,r} = \sigma^2 \frac{e^{-\alpha|u-v|} - e^{-\alpha(u+v-2r)}}{2\alpha} \prod_{i=1}^{n} \frac{1 - e^{-2\beta_i(t_i - \delta_i)}}{2\beta_i}, \quad (19)$$

则对角线上的元

$$r_t^{k,k}(u,v) = A_t E(X_r^{(k)})^2 + \sum_{t,r},$$

于是

$$EZ'_t(u)Z_t(v) = A_t(EX_r^{(k)}X_r^{(l)})I_d + \sum_{t,r} I_d. \quad (20)$$

当 $t_i \to \infty (i \in A)$ 时, $A_t \to 0$, 又由式(19)知 $\Sigma_{t,r} I_d \to$ 式(18)之右方, 从而得证: 在有限维分布收敛意义下, $Z_t(\cdot) \to Z(\cdot)$. 又由于 $r_t^{k,l}(u,v)$ 对正 t 为有界, 故在弱收敛意义下也有 $Z_t(\cdot) \to Z(\cdot)$. ∎

参考文献

[1] Rozanov Yu A. Markov Random Fields. New York: Springer-Verlag, 1982.

[2] Walsh J B. An introduction to stochastic partial differential equations. Lecture Notes in Mathematics, 1986, 1180: 267～439

[3] 王梓坤. 多参数无穷维 OU 过程与布朗运动. 数学物理学报, 1993, 13(4): 455～459

[4] 夏道行. 无限维空间上测度和积分论(上册). 上海. 上海科技出版社, 1965.

[5] Yeh J. Stochastic Processes and the Wiener Integral. New York: Marcel Dekker Inc, 1973.

[6] Billingsley P. Convergence of Probability Measures. New York: John Wiley and Sons, 1968.

[7] 王梓坤. 随机过程通论. 北京: 北京师范大学出版社, 1996.

第24篇 二参数正态过程的马尔可夫性

设 $t=(t_1,t_2)$ 为平面上的点(图1),$R_+^2=(t:t_1\geqslant 0,t_2\geqslant 0)$ 中 Borel σ- 代数记为 $\mathscr{B}_+^2$. $\xi=\{\xi_t(\omega),t\in R_+^2\}$ 为概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的实值随机过程. $t=(t_1,t_2)\geqslant s=(s_1,s_2)$ 如 $t_i\geqslant s_i,i=1,2$, $R_t=(s:s_1\leqslant t_1$ 或 $s_2\leqslant t_2)$, $\mathscr{F}_t=\sigma\{\xi_s,s\in R_t\}$,即括号中变量产生的 σ- 代数. 称 ξ 为二参数马尔可夫过程(二马程),如对任意有界 $\mathscr{B}_+^2$ 可测函数 f,任意 $u=(u_1,u_2)>t=(t_1,t_2)\in R_+^2$,有

$$E(f(\xi_u)|\mathscr{F}_t)=E(f(\xi_u)|\xi_{t_1,u_2},\xi_t,\xi_{u_1,t_2}),(P\text{-}a.s.). \quad (1)$$

以下恒设 ξ 为正态过程,且 $E\xi_t\equiv 0$.

本篇求得了 ξ 为二马程的充要条件;对梯形域,求出了过程的转移概率,它以三点转移概率为特例;顺便解决了梯形域的预测问题;二参数Ornstein-Uhlenbeck过程是正态二马程的特例,本篇定理2推广了文献[1]中定理1与定理3,但方法不同.

任取 $u>t\in R_+^2$ 及 $s\in R_t$,分别以0,1,2记点 $z_0=(t_1,u_2)$, $z_1=t$, $z_2=(u_1,t_2)$. 令 $\xi_i=\xi_{z_i}$; $c(i,j)=E\xi_i\xi_j,i,j=0,1,2,u,s,\cdots$.

$$\Delta=\begin{vmatrix}c(0,0)&c(1,0)&c(2,0)\\c(0,1)&c(1,1)&c(2,1)\\c(0,2)&c(1,2)&c(2,2)\end{vmatrix};\text{以}\begin{pmatrix}c(u,0)\\c(u,1)\\c(u,2)\end{pmatrix}\text{代替}\Delta\text{中第}j\text{直}$$

列所得行列式记为 Δ_j.

假设 H:对一切 $u>t\in R_+^2$,$\Delta\neq 0$.

定理1 设ξ为二参数正态过程，$E\xi_t \equiv 0$，而且满足H，则ξ为二马程的充要条件是：对一切$u > t \in R_+^2$，$s \in R_t$，有

$$c(s,u) = \sum_{j=0}^{2} c(s,j) \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad (2)$$

其中$c(s,u) = E\xi_s\xi_u$，$c(s,j) = E\xi_s\xi_j$.

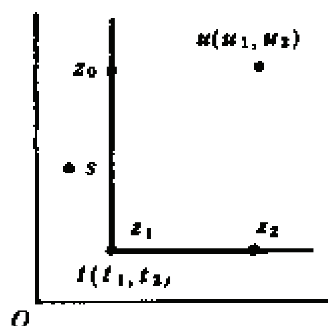


图 1

证 以$L(\cdots)$表示括号中变量生成的在均方收敛意义下的线性闭包；以Σ表示$\sum_0^2 \xi_u$在$L(\xi_0,\xi_1,\xi_2)$中的投影$\widetilde{E}(\xi_u|\xi_0,\xi_1,\xi_2)$记为$\Sigma\alpha_i\xi_i$，则有

$$(\xi_u - \Sigma a_i\xi_i) \perp \xi_j，亦即 E(\xi_u - \Sigma a_i\xi_i)\xi_j = 0,$$

展开后得$c(u,j) = \Sigma c(i,j)\alpha_i$，故$\alpha_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$，$i = 0,1,2$.

必要性 由ξ的正态及马尔可夫性得

$$\begin{aligned}\widetilde{E}(\xi_u|\xi_0,\xi_1,\xi_2,\xi_s) &= E(\xi_u|\xi_0,\xi_1,\xi_2,\xi_s) = E(\xi_u|\xi_0,\xi_1,\xi_2)\\ &= \widetilde{E}(\xi_u|\xi_0,\xi_1,\xi_2) = \Sigma\alpha_i\xi_i,\end{aligned} \quad (3)$$

故$(\xi_u - \Sigma\alpha_i\xi_i) \perp \xi_s$，由此得(2)式.

充分性 由(2)式得$(\xi_u - \Sigma\alpha_i\xi_i) \perp \xi_s$，一切$s \in R_t$. 任取$s = s_1,\cdots,s_n \in R_t$，又取$s = 0,1,2$，得

$$\widetilde{E}(\xi_u|\xi_0,\xi_1,\xi_2) = \Sigma\alpha_i\xi_i = \widetilde{E}(\xi_u|\xi(0\sim s_n)),$$

其中$\xi(0\sim s_n)$表示$(\xi_0,\xi_1,\xi_2,\xi_{s_1},\cdots,\xi_{s_n})$. 由正态性得

$$E(\xi_u|\xi_0,\xi_1,\xi_2) = E(\xi_u|\xi(0\sim s_n)). \quad (4)$$

但对正态过程，此式等价于马尔可夫性. 实际上，记

$$\eta = \xi_u - E(\xi_u|\xi(0\sim s_n)), \eta \perp L(\xi(0\sim s_n));$$

$$\zeta = E(\xi_u|\xi_0,\xi_1,\xi_2).$$

由(4)式$\xi_u = \eta + \zeta$. 由正态性，η与$\sigma\{\xi(0\sim s_n)\}$独立，而ζ为$\sigma\{\xi_0,\xi_1,\xi_2\}$可测，故

$$E(e^{i\iota\xi_u}|\xi(0\sim s_n)) = e^{i\iota\zeta}E(e^{i\iota\eta}) = E(e^{i\iota\xi_u}|\xi_0,\xi_1,\xi_2),$$

后一等号可同样证明. 由此即可推出(1)式. ∎

注 1 可改写(2)式为

$$\begin{vmatrix} c(u,s) & c(0,s) & c(1,s) & c(2,s) \\ c(u,0) & c(0,0) & c(1,0) & c(2,0) \\ c(u,1) & c(0,1) & c(1,1) & c(2,1) \\ c(u,2) & c(0,2) & c(1,2) & c(2,2) \end{vmatrix} = 0.$$

称 R_+^2 中单调下降曲线为简单的，如它由有限或可列多条平行于两坐标轴之一的直线段组成，且在任一 R_t 内只有有限多个角点，后者是两直线段的交点. 由两坐标轴及简单曲线围成的区域称为梯形域(图 2). 任取梯形域 K 及点 $u \overline{\in} K$. 自 u 引二平行于坐标轴的直线，交 K 的边界于 z_0, z_{n+1}，此二点间的角点顺次记为 $z_1, z_2, \cdots, z_n$*. 令

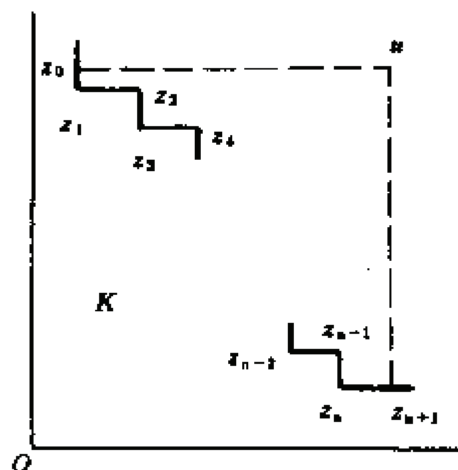


图 2

$L^2(K) = (h(\omega); h$ 为 $\sigma\{\xi_s, s \in K\}$ 可测；$E|h|^2 < \infty)$.

今欲求 $l(u,K) \in L^2(K)$，使

$$E|\xi_u - l(u,K)|^2 = \inf_{h \in L^2(K)} E|\xi_u - h|^2,$$

称 $l(u,K)$ 为 ξ_u 关于 $\{\xi_s, s \in K\}$ 的预测量；预测误差为

$$\varepsilon(l,K) = E|\xi_u - l(u,K)|^2,$$

对正态过程，$l(u,K)$ 重合于线性预测.

简记点 z_i 为 i，$\xi_i = \xi_{z_i}$，$i = 0,1,\cdots,n+1$. x_i 为实数.

定理 2 设 $\xi = \{\xi_t, t \in R_+^2\}$ 为两参数正态马尔可夫过程，$E\xi_t \equiv 0$.

(i) 在条件 $\xi_i = x_i$，$i = 0,1,\cdots,n+1$ 下，ξ_u 的条件分布为 $N(m,\sigma)$ 正态分布，其期望与方差分别为

---

* n 必定为奇数. — 编者

$$m = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i x_i; \quad \sigma^2 = c(u,u) - \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i c(u,i), \tag{5}$$

其中$\{\alpha_i\}$满足方程组

$$c(u,j) = \sum_{i=0}^{n+1} \alpha_i c(i,j), \quad j = 0,1,\cdots,n+1. \tag{6}$$

(ii) $$l(u,K) = \sum_{i=0}^{n+1} \alpha_i \xi_i; \quad \varepsilon(l,K) = \sigma^2. \tag{7}$$

证 简记$(\xi_0,\cdots,\xi_n)$为$\xi(0\sim n)$. 有

$$\begin{aligned} E(\xi_u|\xi(0\sim n+1)) &= \widetilde{E}(\xi_u|\xi(0\sim n+1)) \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} \alpha_i \xi_i \quad (\text{设}). \end{aligned} \tag{8}$$

令 $\eta = \xi_u - \sum_{i=0}^{n+1} \alpha_i \xi_i$; 故 $\eta \perp \xi_j$, 即

$$E\eta\xi_j = 0, j = 0,1,\cdots,n+1,$$

此即(6)式. 于是

$$E(\xi_u|\xi(0\sim n+1))|_{\xi_i = x_i} = \sum_{i=0}^{n+1} \alpha_i x_i,$$

由此得(5)式中前式. 由于

$$l(u,K) = \widetilde{E}(\xi_u|\xi(0\sim n+1)),$$

由(8)式得(7)式中前式. η与$\xi(0\sim n+1)$既垂直又独立, 所以

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E(\eta^2|\xi(0\sim n+1)) = E\eta^2 \\ &= E\xi_u\left(\xi_u - \sum_{i=0}^{n+1} \alpha_i \xi_i\right), \end{aligned}$$

此即(5)式中后式. 此外, $\varepsilon(l,K) = E\eta^2 = \sigma^2$. ∎

三点转移概率是(i)中条件分布当$n=1$时的特例(见图1), 故有

推论 1 在定理2条件下, 如满足假设H, 则三点转移概率

$$P(\xi_u \leqslant a|\xi_0,\xi_1,\xi_2)|_{\xi_i = x_i} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} \mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x,$$

$$m = \sum_{i=0}^{2} \frac{\Delta_i}{\Delta} x_i; \quad \sigma^2 = c(u,u) - \sum_{i=0}^{2} \frac{\Delta_i}{\Delta} c(u,i).$$

例 1　设 ξ 为布朗单[2]，$t=(t_1,t_2)$，$u=(t_1+h_1,t_2+h_2)$，$h_1>0$，$h_2>0$，则 $E\xi_0\xi_j=t_1t_2$，$j=0,1,2,u$，等等. 又 $E\xi_s\xi_u=s_1(t_2+h_2)$，如 $s_2>t_2+h_2$；$=s_1s_2$，如 $s_2\leqslant t_2+h_2$. $\Delta=-\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3$. 不难验证(2)式成立，故 ξ 为二马程. 另 $m=x_1+x_2-x_0$，$\sigma^2=h_1h_2$.

例 2　设 $\{\eta_{t_2},t_2\geqslant 0\}$ 为一参数正态过程，定义 $\xi_{t_1,t_2}=\eta_{t_2}$，则 ξ 为二参数正态过程，且为二马程[3]. 但 $c(i,1)=c(i,2)$，$i=1,2$. 故 $\Delta=0$ 而 H 不成立. 然而注 1 中的四阶行列式则仍为 0.

参考文献

[1] 王梓坤. 科学通报，1986，31(23)：1761～1764

[2] Rozanov Yu A. Markov random fields. Berlin：Springer-verlag，1982，157～162

[3] 黄长全. 科学通报，1988，33(14)：1050～1052

第25篇 超过程的幂级数展开

25.1 超过程及其拉普拉斯泛函

设$(E,\mathscr{B})$为可测空间，Δ为$[0,\infty)$中某区间，$X=\{x_t,t\in\Delta\}$为取值于$(E,\mathscr{B})$中的马氏过程，转移概率为$P(s,x;t,\mathrm{d}y)$，算子半群为$\{T_u^r,r,u\in\Delta,r\leqslant u\}$：

$$T_u^r f(x):=\int_E P(r,x;u,\mathrm{d}y)f(y),f\in B^+. \tag{1.1}$$

B^+为定义在E上的全体非负、有界$\mathscr{B}$-可测函数之集. 以下简记$\langle f,v\rangle=\int f\mathrm{d}v$.

伴随过程X，考虑Dawson-Watanabe型超过程Y. 以m表示全体定义在$\mathscr{B}$上的有限测度μ之集，$\mathscr{B}_m$为m中含一切如下形的集的最小σ-代数：

$$(\mu:\mu\in m,\mu(B)\leqslant a),B\in\mathscr{B},a\geqslant 0.$$

设对每$t\in\Delta$，存在一取值于$(m,\mathscr{B}_m)$的随机变量y_t. 设$Y=\{y_t,t\in\Delta\}$为马氏过程，转移概率为$q(r,\mu;u,\mathrm{d}\nu)$. 称Y为X的超过程，如对每$f\in B^+,\mu\in m,r\leqslant u\in\Delta$，数$\lambda>0$，有

$$g(\lambda):=E_{r,\mu}\exp\{-\lambda\langle f,y_u\rangle\}=\exp\{-\langle V_u^r(\lambda f),\mu\rangle\}, \tag{1.2}$$

亦即 $\int_m q(r,\mu;u,\mathrm{d}\nu)\exp\{-\lambda\langle f,\nu\rangle\} = \exp\{-\langle V_u^r(\lambda f),\mu\rangle\}$

其中 $V_u^r(r \leqslant u \in \Delta)$ 为作用在 B^- 上的压缩非线性算子半群，它通过下式由 T_u^r 决定：

$$V_u^r(\lambda f) = -\int_r^u T_s^r[(V_u^s(\lambda f))^2]\mathrm{d}s + \lambda T_u^r f. \tag{1.3}$$

在[1]中已证明(1.3)的解唯一存在.(1.2)之左是$\langle f,y_u\rangle$的拉普拉斯变换，$f \in B^+$；亦称为超过程 $Y = \{y_t, t \geqslant 0\}$ 的拉普拉斯泛函. 此泛函唯一决定 Y 的转移概率 q.

本篇证明此拉普拉斯泛函(即$g(\lambda)$)可展开为λ的幂级数；并求出$\langle f,y_u\rangle$关于$E_{r,\mu}$的各级矩；级数的系数及矩可由递推式依次求出，n 级矩可表为一级矩的 n 次多项式；各级矩唯一决定$\langle f,y_u\rangle$关于测度 $P_{r,\mu}$ 的分布.

下面用到幂级数理论中一简单结果：设

$$F(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\lambda^n,\ G(\lambda) = \exp F(\lambda),$$

则 $G(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\lambda^n$；此二级数有相同的收敛半径，且

$$nb_n = \sum_{k=1}^{n} ka_k b_{n-k} \quad (n = 1,2,\cdots,b_0 = 1), \tag{1.4}$$

其证明可由 $G'(\lambda) = F'(\lambda)G(\lambda)$ 及比较系数而得.

25.2 幂级数展开及各级矩

记 $\|f\| = \sup_x |f(x)|$. 对已给的 $s < u \in \Delta$，设函数 $\varphi_u^s(x)$、$\psi_u^s(x) \in B^+$. 定义卷积

$$(\varphi * \psi)_u^r = \int_r^u T_s^r(\varphi_u^s \psi_u^s)\mathrm{d}s.$$

设已给 $f \in B^+$，记

$$\varphi^{(1)} := \varphi := \varphi_u^r := T_u^r f.$$

$$\varphi^{n*} := \sum_{K=1}^{n-1} \varphi^{k*} * \varphi^{(n-k)*}. \tag{2.1}$$

$$\Phi_n = \langle \varphi^{n*}, \mu \rangle. \tag{2.2}$$

定理 2.1 当 $|\lambda| < R := 1/4(u - r)\|\varphi\|$ 时,有

$$E_{r,\mu}\exp[-\lambda\langle f, y_u\rangle] = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n \lambda^n, \tag{2.3}$$

其中 $b_0 = 1$,

$$nb_n = \sum_{k=1}^{n} k\Phi_k b_{n-k}. \tag{2.4}$$

证 改写(1.3)为算子方程

$$V = -V * V + \lambda\varphi. \tag{2.5}$$

如[1]所指出,(2.5)之形式解为

$$V = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\varphi^{n*}\lambda^n. \tag{2.6}$$

这只需利用(2.1)并以(2.6)代入(2.5)后即可看出. 今证此级数当 $|\lambda| < R$ 时收敛,从而它确是(2.5)之解. 以 B_n 表示 φ^{n*} 中所含之项数. 由(2.1)知

$$B_1 = B_2 = 1,$$

$$B_n = \sum_{k=1}^{n-1} B_k B_{n-k}. \tag{2.7}$$

由于 $\|\varphi^{n*}\| \leqslant B_n(u - r)^{n-1}\|\varphi\|^n$,故(2.6)中级数被

$$(u - r)^{-1}\sum_{n=1}^{\infty} B_n (u - r)^n \|\varphi\|^n \cdot |\lambda|^n \tag{2.8}$$

所控制. 考虑辅助函数 $f(\theta) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4\theta})$,则有

$$\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \theta^n. \tag{2.9}$$

实际上,易见 $f(\theta) = \theta + f^2(\theta)$, $f'(0) = 1$. 将 $f(\theta)$ 的幂级数展式代入此式,即知其系数应满足(2.7),而(2.7)唯一决定$\{B_n\}$,故得证(2.9). 显然(2.9)中级数之收敛半径为$\frac{1}{4}$,从而$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{B_n} = 4$.

于是控制级数(2.8)之收敛半径为 $R = 1/4(u-r)\|\varphi\| > 0$. (2.6)中级数也因之在 $(-R,R)$ 中绝对、一致收敛. 以(2.6)代入(1.2),得

$$g(\lambda) = \exp\left[-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\langle\varphi^{n*},\mu\rangle\lambda^n\right]$$

$$= \exp\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\Phi_n\lambda^n\right] \equiv 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n\lambda^n. \tag{2.10}$$

而(2.4)由(1.4)得到. ▮

考虑 n 级矩 $M_n = E_{r,\mu}[\langle f, y_u\rangle^n]$.

定理 2.2 各级矩 $M_n, n = 1,2,\cdots$ 存在,它们可由下列递推式依次求出:

$$M_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k^{n-1}(n-k)!\Phi_{n-k}\cdot M_k \tag{2.11}$$

$(M_0 = 1, C_0^{n-1} = 1)$. 矩唯一决定 $\langle f, y_u\rangle$ 关于 $P_{r,\mu}$ 之分布.

证 (2.3)中级数之收敛半径大于0,故各级矩存在而且唯一决定分布[2,第234页]. 由(2.3)(2.4)及

$$E_{r,\mu}\exp[-\lambda\langle f, y_u\rangle] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n M_n}{n!}\lambda^n,$$

得

$$M_n = n!b_n = (n-1)!\sum_{k=1}^{n}k\Phi_k b_{n-k}$$

$$= (n-1)!\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\Phi_{n-k}b_k$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}C_k^{n-1}(n-k)!\Phi_{n-k}\cdot M_k. \quad ▮$$

今写出前四级矩如下:

$M_1 = \Phi_1 = \langle\varphi,\mu\rangle = \langle T_u^r f,\mu\rangle$,

$M_2 = 2\Phi_2 + M_1^2$,

$M_3 = 6\Phi_3 + 6\Phi_2 M_1 + M_1^3$,

$M_4 = 24\Phi_4 + 12\Phi_2^2 + 24\Phi_3 M_1 + 12\Phi_2 M_1^2 + M_1^4$.

前二级矩已在[1]中求出.

注 2.1 记 $f(\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\Phi_n\lambda^n$, $f^{(k)}(0)=(-1)^k k!\Phi_k$. 改写(2.10)为 $g(\lambda)=\exp f(\lambda)$. 由此算得的 $M_n=(-1)^n g^{(n)}(0)$ 与(2.11)一致.

25.3 可加泛函

用上述方法类似地可求出超过程的可加泛函

$$I_u^r(h):=\int_r^u h^s \mathrm{d}z_s$$

的拉普拉斯变换的幂级数展开及各级矩,这里 $h^s:=h^s(x)$ 为有界 $\mathscr{B}_\Delta\times\mathscr{B}$ 可测非负函数,$\mathscr{B}_\Delta$ 为 Δ 中 Borel σ-代数,记号详见[1],那里已证明

$$E_{r,\mu}\left[\exp\left(-\lambda\int_r^u h^s \mathrm{d}z_s\right)\right]=\exp[\langle w_u^r,\mu\rangle]$$

对 $\lambda<1/4\|h\|(u-r)$ 成立,而

$$w_u^r=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\varphi^{n*}\lambda^n,\quad \varphi:=\varphi_u^r=h^r I_{r\leqslant u}.$$

记 $A_n=\langle\varphi^{n*},\mu\rangle$,则有

$$\begin{aligned}E_{r,\mu}\exp\left[-\lambda\int_r^u h^s \mathrm{d}z_s\right]&=\exp\left[\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n A_n\lambda^n\right]\\&=1+\sum_{k=1}^{\infty}C_k\lambda^k,\end{aligned}$$

其中 $C_0=1, C_1=0, nC_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k kA_kC_{n-k}$;

而 $$E_{r,\mu}\left[\left(\int_r^u h^s \mathrm{d}z_s\right)^n\right]=(-1)^n n!C_n.$$

一类特殊的可加泛函(即停留时)已在[3]中详细研究.

参考文献

[1] Dynkin E B. Superprocesses and their linear additive functionals. Tran. Amer. Math Soc. 1989,314:255～282

[2] Feller W. An introduction to probability theory and its applications. vol. 2,1971.(汉译本见:W.费勒.概率论及其应用(第二卷).李志阐、郑元禄译.北京:科学出版社,1994.)

[3] Iscoe I. A weighted occupation time for a class of measure-valued branching processes. Probability theory and related fields,1986,71:85～116

第5卷

混沌与随机

本卷研究的是概率论和数学中带有哲理性的问题，主要是决定性、随机性、伪随机性、随机迭代、随机混沌等及它们之间的关系，这些概念和问题都是历史上长期一直争论着的. 本卷中给出了一种独特的、清新的见解. 本卷含第 26、27 篇共 2 篇.

第 26 篇论随机性. 每一发展过程是随机性与必然性的交替，它们由分支点分离. 随机试验可分为 3 类：归一型、发散型与振动型. 拉普拉斯关于决定论的观点至少对发散型试验不正确. 因此，随机性是客观的，不是出于人们的无知. 对于非重复试验给出了一些计算概率的方法.

第 27 篇论混沌与随机. 人们对混沌、决定性、随机性之间的

关系众说纷纭．哲学上一个长期争论的重要问题是：世界是决定性的还是随机性的？由于混沌学的兴起，决定性与随机性之间的鸿沟正趋于消失．本篇中，建立了一种随机迭代模型；讨论了混沌与随机性的关系．许多混沌现象是一列随机事件与必然事件交互作用的结果，有些混沌是决定性系统的伪随机性．

第26篇 论随机性

26.1 随机性与必然性的相互交替

在某些条件下，一定出现（或一定不出现）的事件，称为必然事件；或者说，这事件具有必然性．在某些条件下，可能出现，也可能不出现的事件，称为随机事件（也称为偶然事件）；或者说，这事件具有随机性（偶然性）．必然与偶然，都是相对于条件而言的．在101.325kPa气压及100℃温度时，“水必沸腾”是必然事件；“明年某河流将泛滥成灾”是随机事件．

事物的发展，是多层次的随机事件与必然事件相互交替和相互作用的过程．有些人说，发展过程中必然性（或决定性）是主导的，随机性是次要的；另一些人则反之．二者皆失之偏颇，不符合客观实际．

种子随机地扎根于某地（1层），默默地度过一段时间后，必然破土而出（2层），这时它只有一根主干．到了某一时刻，它分成几支，分支的时刻和支数都是随机的（3层）．每一支又平静地生长（4层），再分支（5层），如此继续．若干年后，它或遭意外，或者枯萎，这死亡的时刻和原因又是随机的．

婴儿呱呱堕地，他的出生充满了偶然性（1层）．他平静地度

过童年（2 层）．18 岁时，他站在人生道路的分支点上，在就业和升学间进行随机选择（3 层）．过了这一关，他可以安心地工作和学习相当长时间（4 层），然后又一次站在分支点上（5 层）……直至某一偶然的时刻，来到偶然的地点，出于偶然的原因，结束他那偶然的生命．

邱吉尔说："一个人活得愈长，他就愈认识到一切取决于机会．任何人哪怕只要回顾一下 10 年前的经历，他就会看到某些本身毫不重要的细小事件，实际上都左右了他的全部命运和前程．"他所说的细小事件，大都集中在分支点上．"却顾所来径，苍苍横翠微"，只有回过头来，才能认识它们的巨大作用，于是大吃一惊而感叹万千．

天文学家还不能确切告诉我们地球是怎样诞生的．行星（甚至太阳）的形成有很大的偶然性．地球也必定经历了许多分支点．地质学家说地球至少发生过 6 次生物大规模灭绝[1]，最著名的一次是 0.6 亿年前的恐龙灭绝．如果没有那次灾变，今天的地球也许还是恐龙世界．生物灭绝的原因有种种假说：超新星爆发、行星撞击、太阳耀斑爆发、海平面变化、温度变化等等，无一不充满偶然性．多么危险的地球！地球如此，极而言之，整个宇宙也是偶然的．导致混沌初开的大爆炸，星系的形成与分布，生命的出现，行星上有多少种动物和植物，每一种中有多少个体，都含有许许多多偶然的因素．

每个国家的历史也有许多分支点，如果在分支点上换另一种选择，历史便当另写．设若在鸿门宴上项羽杀了刘邦，便很可能没有汉朝，没有刘皇叔（刘备），没有大家津津乐道的诸葛亮．

说了这么多的偶然性，难道"人是要死的"、"明天太阳还会升起"也有偶然性吗？否！这是千真万确的必然事件．不过，生命之于身体，正如飞之于飞机，飞是飞机的功能，生命也是身体的功能．生命是暂存的，而构成身体的物质是永恒的；生命只是这些物质在 2 个分支点（出生与死亡）之间的一种运动形式，而在这 2 点之间，运动是相对平稳的、缓变的，必然性居主导地位，

它必然地要走向下一分支点，即死亡. 但这分支点何时到来、如何到来以及以后这些物质如何继续运动，则是随机的. 同样，太阳东起西落，也只是地球在 2 个分支点（从稳定运行到失稳）间的决定性运动，在失稳以后，还能说太阳明天升起吗？

关于太阳升起问题，拉普拉斯做过研究：假设太阳已接连升起 n 次，问它还会升起 1 次的概率是多少？他的答案是 $(n+1)/(n+2)$. 当 n 很大时这几乎等于 1，所以我们对明天的安全可以放心. 不过这答案只适用于地球处于上述 2 个分支点之间时；不然，若 $n\to\infty$，这概率 $\to 1$，而这是荒谬的，因为太阳系决不会永久稳定下去，总有一天它会瓦解.

上述众多事实说明了事物发展的一般法则：发展过程是偶然与必然的相互交替和相互作用. 在发展道路上有许多分支点，在相邻 2 点之间，发展是相对稳定的、量变的、合乎逻辑的，必然性起着主导作用；但这里也可能有次要的分支点和次要的随机因素. 分支点的到来是随机的，在分支点上，发展前途面临多种选择，必须选择其一而尽弃其余，这时运动是不稳定的、突变的，随机性起主导作用. 一旦选定以后，发展又趋于稳定，直到下一分支点，如此继续，如图 1 所示. 事物必需从 $A_0A_1B_1C_1$，…，$A_0A_1B_3C_7$ 等 7 条道路中选择 1 条，尽管这 1 条未必比其他 6 条都优越. 由此可见，我们的宇宙史、国家史、家庭史、个人史，都只是许许多多可供选择中的一种，它们全都富含随机性；如果说得偏激点，它们全是随机的.

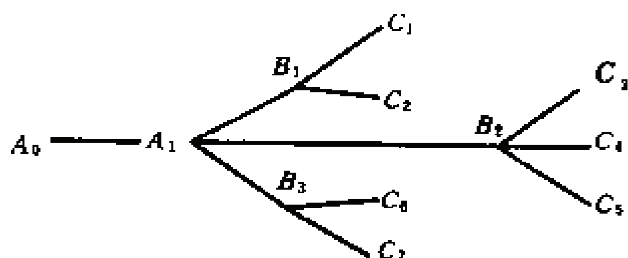


图 1

偶然性来自何方？来自事物内部的变化，来自外环境的碰撞. 构成事物的各种物质、各种因素以及支配它们的各种力经常处于运动之中. 如果各自的运动处于允许范围之内，那么事物整体的发展是稳定的、缓变的；一旦某些主要部分的运动超越甚至远离

允许范围时，整个事物就会发生突变，而那些部分超越则是随机的. 可以设想一个混乱社会最后如何随机转变的情形以增加我们的想象力. 事物处于外环境中，它经常与其他事物发生关系，称之为碰撞. 其作用小则可影响事物的量（如速度、大小），大则可影响事物的质（如方向、性质）. 人类社会是一个极富于随机性的碰撞世界：亲属、朋友、师生、同事的结合是随机的，人与人、人与事、人与物的相互作用，形势的影响，都可视为碰撞. 即使是站着不动的植物，也要受到自然、环境及动物的种种碰撞. 不过有些碰撞（如上街遇到的许多行人）未起作用，为人们所忽视，而起作用的（如车祸），则可使人终生难忘. 外部的碰撞可以促进内因的变化，内外是互为影响的，不能截然分开.

结构单纯、质量和体积巨大的物体有比较稳定的内环境，如果它又远离其他大物体，从而外部碰撞甚少，那么，相对于这种物体，偶然性便很小，分支点之间的距离便很长，这就是为什么天体运行基本上遵循必然法则的原因. 如果我们的寿命长达百亿年，我们就会看到天体经过许多分支点而作随机运动，那时就不会说天体运动是必然的了. 另一方面，极小的粒子在碰撞下极不稳定，微观世界所以基本上是偶然的世界，这是原因之一.

以上讨论了偶然与必然的交替，提出了分支点的概念，还谈了偶然性的来源. 下面考虑偶然性与必然性的关系.

随机性大都出现在分支点附近，但这并不意味着二相邻分支点间没有随机性，一些次要的偶然事件、次要的分支点经常在这里出现；此外，我们在前面还谈到正是在这段时间内孕育着新的随机性. 在许多场合，偶然受到必然的限制. 必然性给它划定了一个范围，随机选择只能在此范围内进行. 例如，婴儿的性别虽是偶然的，但只有 2 种可能.

随着条件的改变，必然事件与偶然事件可互相转化. 向一巨大的目标射击，击中是必然的；现在设想目标不断缩小，起初击中还是必然的，但小到某一限度后，击中目标便成为偶然事件了. 这提示人们可以设想有一临界值或临界区存在. 这是必然转化为

偶然的例子．另方面，在正常交通情况下，车祸是偶然的，但在禁止车辆通行的路段，车祸不可能发生，偶然化为必然．

彭加来说："最大的机遇莫过于一个伟人的诞生"[2]．其所以如此，一是由于某人的诞生是一系列随机事件的复合：父母、祖父母、外祖父母……的结合、异性的2个生殖细胞的相遇，而这2个细胞又必须含有某些产生天才的因素．另一是婴儿出生以后，各种偶然遭遇在整体上必须有利于他的成功，他所处的时代、他所接受的教育、他的各项活动、他所接触的人与事与物，都需为他提供好的机会．所以，某个特定的人要成为伟人，可能性是极小的．

虽然如此，各时代仍然伟人辈出．一个人成功的概率虽极小，但几十亿人中总有佼佼者，这就是所谓"必然寓于偶然之中"的一种含义．数学中称之为"小概率原理"．设某试验中出现事件A的概率为ε，不管$\varepsilon>0$如何小，如果把这试验不断独立地重复下去，那么A迟早必然会出现1次，从而也必然会出现任意多次．这是因为，第1次试验中A不出现的概率为$1-\varepsilon$，前n次A都不出现的概率为$(1-\varepsilon)^n$，因之前n次试验中A至少出现1次的概率为$1-(1-\varepsilon)^n$．当$n\to\infty$时这概率趋于1，这表示A迟早出现1次的概率为1；出现A以后，把下次试验当作第1次，重复上述推理，可见A必然再次出现，如此继续，可知A必然出现任意多次．应用此原理于伟人问题，一个人成为伟人的概率ε固然非常小，但千百万人中至少有一伟人就几乎是必然的了．

"必然寓于偶然之中"的另一含义是大数定律，它的特殊情形是频率的稳定性，即频率趋于概率．设某试验中事件A出现的概率为$p>0$，将此试验独立地重复n次，其中A出现了m次，于是频率为m/n．根据大数定律，当$n\to\infty$时，必然有$m/n\to p$．因此，当n充分大时，得$m\approx np$．

我们不能确切预知一个婴儿的性别，只知他是男性的概率为1/2；但由上述定律，我们可以断言，100万婴儿中，约有1/2即50万个男婴，这几乎是必然的．

26.2 随机试验

每个随机事件都联系于一随机试验；后者完整地刻画了一族随机事件.

固定条件组 $C=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$，其中 c_i 代表第 i 个条件. 如前所述，在 C 下，一定出现的事件 A 称为（相对于 C 的）必然事件. 其模型为

$$\left.\begin{matrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{matrix}\right\} \Rightarrow A. \tag{2.1}$$

随机试验（简称试验）E 的模型则为

$$\left.\begin{matrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} (A_1,\ p_1) \\ \quad\vdots \\ (A_m,\ p_m)\ . \end{cases} \tag{2.2}$$

它表示：在条件组 $C=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 下，可能出现的结果是 A_1，$\cdots$，A_m 中之一，一次试验中出现 A_i 的概率为 p_i，$1>p_i>0$，$p_1+p_2+\cdots+p_m=1$. 有时也称 A_i 为状态.

由于 A_i 在一次试验中可能出现（概率为 p_i），也可能不出现（概率为 $1-p_i$），所以 A_i 是一随机事件，$(i=1,\ \cdots,\ m)$. 我们假定 $m>1$ 以保证 E 的随机性. 如果允许 $m=1$，这时（2.2）便化为（2.1），于是必然事件可看成为概率是 1 的随机事件.

例 2.1 无偏倚地（条件 c_1）扔一枚正常的（c_2）硬币，登记朝上的面. 2 个可能的状态及概率分别为

$$(A_1,p_1)=(\text{正},1/2);(A_2,p_2)=(\text{反},1/2).$$

登记婴儿性别也同此试验，只需理解“正、反”为“女、男”.

例 2.2 军事家克劳塞维茨说：“人类的任何活动都不像战争那样给偶然性这个不速之客留有这样广阔的活动天地，因为没有一种活动像战争这样从各方面和偶然性经常接触.”天气，一次射

击的效果，一个士兵的暴露，司令官选择策略……都有偶然性．我们可以把甲乙双方进行的战争看成一随机试验，条件 C 由双方目前的军事、经济等情况组成，可能的结果有 4：

A_1——甲胜；　　A_2——乙胜；　　A_3——和局；

A_4——两败俱伤．

在战争初期，很难确定 A_i 的概率，它随事态发展而逐步明确．以后会看到，这是归一型的随机试验．

条件 C 决定各状态的概率 p_j，$j=1$，…，m，p_j 可看成 C 的泛函．如何从 C 求出 p_j 是一非常重要而一般又很困难的问题．多数情况 p_j 是 C 的非线性泛函，除了"各结果等可能"或"几何概率"等几种特殊情况外，并无求 p_j 的一般方法，需要具体问题具体解决．但对可重复试验，如果精确度的要求不太高，如前面谈过的可以用频率来近似地求出 p_j．由于频率是客观的存在，所以对可重复试验，事件的概率是客观的，不能由人主观地任意赋予[3]．

我们说随机试验 E 是可重复的，是指在相同的条件 C 下，可将 E 不断地独立地进行下去．上述例 2.1 中试验是可重复的，人们可将此硬币不断扔掷．所谓重复可如下理解：或将 E 在 C 下独立进行 n 次；或取 n 个与 E 相同的试验 E_1，E_2，…，E_n 在 C 下同时各进行 1 次；或取 $l(\leqslant n)$ 个与 E 相同的试验在 C 下各做若干次，使总次数为 n．

引进时间 t，便得到随机试验的动态模型：

$$\left.\begin{array}{c} c_1(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} (A_1, p_1(t)) \\ (A_m, p_m(t)), \end{array}\right. \tag{2.3}$$

其中 $1 > p_i(t) \geqslant 0$，$p_1(t) + \cdots + p_m(t) = 1$．又 $c_i(t)$，$p_i(t)$ 分别表示在时刻 t 的第 i 个条件及 A_i 的概率．在 t 时，也许减少了、也许新增了一些条件，所以 n 也应依赖于 t，即 $n = n(t)$；同理，$m = m(t)$．不过为了记号简单，把 t 略去了．现在还允许 $p_i(t) = 0$，以便表示在 t 时 A_i 不可能出现，尽管在别的时刻 A_i 可能出现．

以 e 表示试验结束的时刻，$0<e\leqslant\infty$. 全体随机试验可分成互不相交的 3 种类型.

a. 归一型：存在一个状态 A_k，使

$$\lim_{t\to e}p_k(t)=1. \tag{2.4}$$

这表示：当试验接近尾声时，A_k 出现的概率越来越大，最后成为必然事件，于是偶然性逐渐转化为必然性. 存在一临界时刻 a，使

$$p_k(t)\geqslant 90\%，一切\ t\in[a,e).$$

这表示自 a 而后，出现 A_k 的概率已不小于 0.9. 称 $[a,e)$ 为转化区间，其长 $e-a$ 随问题而定. 上述例 2.2 便是归一型的. 例如，到 1944 年冬，二次大战中日本失败已成为定局. 许多比赛也是归一型随机试验.

b. 分散型：存在极限

$$\lim_{t\to e}p_i(t)=q_i\geqslant 0，一切\ i; \tag{2.5}$$

而且至少有 2 个状态 A_k、A_j，使

$$q_k>0,\ q_j>0. \tag{2.6}$$

这表示，即使试验临近结束，仍然不能断定哪一状态必然出现，从而随机性贯彻始终. 例 2.1 属于分散型，因为 $p_1(t)\equiv p_2(t)\equiv 1/2$. 又如：在群体遗传学中，Hardy-Weinberg 定律表示：对 3 种基因型 AA，Aa，aa，第 t 子代取这些型的概率分别为

$$p_t(AA)=p^2,\ p_t(Aa)=2pq>0,\ p_t(aa)=q^2.$$

它们与 $t=1,2,3,\cdots$ 无关，p，q 为正常数. 故基因型试验是分散型的.

一般地，如在时刻 $t=1,2,3,\cdots$ 将同一试验重做 1 次，假定这些试验彼此无关地独立进行，则 $p_i(t)\equiv q_i$ 与 t 无关，$i=1,2,\cdots,m$. 因试验是随机的，至少有 2 个非 0 的 q_i，于是这一列试验是分散型的. 由此可见，分散型试验非常多.

c. 振动型：至少有一状态 k，使极限 $\lim\limits_{t\to e}p_k(t)$ 不存在；也就是说，

$$\overline{\lim_{t\to e}}\,p_k(t)>\underline{\lim_{t\to e}}\,p_k(t). \tag{2.7}$$

作为一例，考虑飞机飞行，A_1 表示无事故，A_2 表示有事故，$p_1(t)$ 是第 t 日飞行无事故的概率. 由于大气影响飞行，好日子事故少. 以 s_i 表示好日子，t_j 表示坏日子，有

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{t\to b}} p_1(t) &= \lim_{s_i\to b} p_1(s_i) \\ &> \lim_{t_j\to b} p_1(t_j) = \underline{\lim_{t\to b}} p_1(t),\end{aligned}$$

因而飞行可看成振动型随机试验.

上述 3 种类型已穷尽一切随机试验，每一试验必定也只能属于三者之一. 下面将看到，这种分类对讨论拉普拉斯的决定论很有帮助.

概率分布 $P(t)=(p_1(t),\cdots,p_m(t))$ 的熵定义为

$$I(P(t)) = -\sum_{i=1}^{m} p_i(t)\log p_i(t).$$

它是此分布的偶然性大小（或称为混乱程度）的量度，也可把它看成定义在分布所成集合上的泛函. $I(P(t))$ 越大，$P(t)$ 的偶然性也越大. 可以证明，当 $P(t)$ 为均匀分布 $(1/m,\cdots,1/m)$ 时，熵取极大值 $\log m$. 容易看出：

对归一型试验，$\lim\limits_{t\to e} I(P(t)) = 0$；

对分散型试验，$\lim\limits_{t\to e} I(P(t)) > 0$；

对振动型试验，$\lim\limits_{t\to e} I(P(t))$ 不存在.

故用熵的极限，也可区分这 3 类试验.

更广泛的随机事件，是一系列随机试验串联的结果，例如上述伟人的诞生；另一些则是由许多试验并联而产生，如碰撞或巧遇. 最一般地，可以同时考虑串联与并联，于是得到复合随机试验的图式（图 2）：图中每一 E 代表一随机试验.

巧遇是一种复合试验，它使世界丰富多采，令人惊奇不已. 巧遇是小概率事件，它一般不会出现；而一旦出现，就可能创造奇迹. 例如：美国有 15 人将参加晚 7 时 15 分的排练，他们都因不同原因而迟到；那晚排练室被人放了定时炸弹，7 时 25 分爆炸，这 15 人全因迟到而免于难，真是幸运之至. 又如：地球上生命的出

现也是一系列巧合的结果，它要求地球离太阳不远不近、质量不大不小，恰好都是现在那样，还要求有一个大得出奇的卫星（月亮），等等. 由于这种巧合的概率太小，不少人认为人类在宇宙中是孤独的，不存在地球外的生命. 人的一生有许多巧遇，其中部分是好机会，另一些则是倒霉事. 聪明人善于抓住、利用甚至制造好机会，同时尽量避免坏机会. 衡量"巧"的尺度是概率的"小". 统计学家利用小概率事件来作假设检验：在假设 H 下设计一个小概率（譬如1%）事件 A，在一次试验中，这事件一般不会出现；但如果它居然出现了，便使人不得不怀疑假设 H 的正确性，因之否定 H. 在一些复合试验中，偶然性的后果可被层层放大. 例如，某甲因遇上好友多喝了酒，上公共汽车后呕吐，司机因躲避呕吐使车失控而打横，这时后面紧跟上来的另一辆车紧急转向道旁而翻入河中，造成惨案.

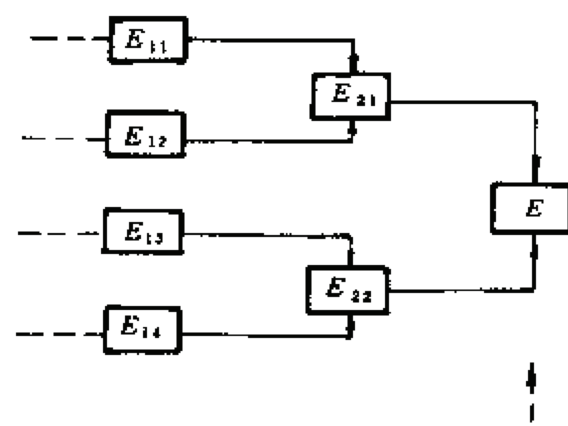


图 2

26.3 偶然性的客观性

偶然性是客观的吗？这是历史上长期争论的著名问题，爱因斯坦与玻尔的争论实质上也与此有关. 一些人认为，世界是决定性的，偶然性只是出于人们的无知. 如果我们能预知一切情况，以后的发展便全已知，关于这点1814年拉普拉斯说得很明确："智慧如果能在某一瞬间知道鼓动着自然的一切力量，知道大自然所有组成部分的相对位置，再者，如果它是如此浩瀚，足以分析这些材料，并能把上至庞大的天体、下至微小的原子的所有运动悉

数囊括于一个公式之中，那么，对于它来说，就没有什么东西是不可靠的了，无论是将来或过去，在它面前都会昭然若揭."（拉普拉斯：《概率论的哲学试验》）按照这种观点，宇宙的一切发展，早在混沌初开时就已决定. 2 次世界大战、肯尼迪遇刺、某人手中所拿到的每付扑克牌的花色，都是百亿年前就已注定了的. 谁也不会同意这些意见，然而这竟出自大科学家之手笔，不能不令人深思：难道他毫无道理吗？

有些本来是必然的问题，由于无知，被人们当作随机问题来处理. 例如："存在地球外的生命吗？"答案必然是"是"或"否". 但现在，由于我们知识的贫乏，只能作出如下概率式的回答："存在球外生命的概率超过 90%". 类似地，人们常说："《金瓶梅》的作者很可能是王世贞"、"很有希望从地下挖出王羲之写的《兰亭序》"等等. 对于这种人造的伪随机事件，拉普拉斯的观点是正确的.

对归一型试验，由于 $\lim\limits_{t\to e} p_k(t) = 1$，它逐渐转变为必然试验. 因此，只要观察时刻落人转化区间，人们就能很准确地预言试验的结果. 对这种试验，拉普拉斯的论点也有充分理由.

然而，对于分散型试验，情况就不同了. 这里偶然性贯彻始终，直到试验结束，仍然至少有 2 个状态都可能出现. 无论知识如何丰富，决不能唯一地、决定性地预言试验的结果，预言只能是概率式的："出现 A_k 的概率为 p_k". 例如，无论怎么聪明，无论知识和经验如何丰富，谁也不能预知玩扑克时下次手中牌的花色. 由此可见，至少对分散型试验，随机性是客观存在的.

再考虑振动型. 不妨设只有 2 个状态 A_1 与 A_2（如果有 m 个，那么把 $A_3, \cdots, A_m$ 合并到 A_2 中成一新状态，仍记后者为 A_2）. 由振动型定义，存在 2 个不相交的数列 $s_i \to e$，$t_i \to e$，使当 $i \to \infty$ 时有

$$p_1(s_i) \to a = \overline{\lim_{t\to e}}\, p_1(t), \quad p_1(t_i) \to b = \underline{\lim_{t\to e}}\, p_1(t),$$

其中 $1 \geqslant a > b \geqslant 0$. 由于 $p_1(t) + p_2(t) = 1$，故

$$p_2(s_i) \to 1 - a, \quad p_2(t_i) \to 1 - b.$$

共有 3 种情形：

a. $a=1$，$b=0$，于是

$$p_1(s_i)\to 1,\quad p_2(t_i)\to 1.$$

从而沿 $\{s_i\}$，A_1 逐步变为必然状态，而沿 $\{t_i\}$，则 A_2 逐步变为必然的. 于是在此二时间序列 $\{s_i\}$、$\{t_i\}$ 上，此试验分别化为二不同的归一型试验，其一最终必出现 A_1，另一最终必出现 A_2.

b. $a<1$. 这时

$$p_1(s_i)\to a>0,\quad p_2(s_i)\to 1-a>0,$$

于是沿 $\{s_i\}$，此试验是分散型的.

c. $b>0$. 这时

$$p_1(t_i)\to b>0,\quad p_2(t_i)\to 1-b>0,$$

于是沿 $\{t_i\}$，此试验也是分散型的.

复合试验，如果不是人的预谋，大多数是不能准确预测的. 因为，只要其中包含一个分散型的子试验，整个试验的结果便不能确切地唯一地决定.

26.4 非重复随机试验

科学需要重复. 不能重复的一次性现象，科学中一般不予研究，因为缺乏客观的检验. 然而实际中有许多问题，意义非常重大，人们津津有味地议论它们，却不幸是非重复的. 例如：近期能再爆发世界大战吗？某人会患癌症吗？某地会发生大地震吗？我们能否计算这些事件的概率？

原则上说，概率由试验的条件决定；只要给出了随机试验，概率也就决定了. 但在实际问题中，情况要复杂得多，一是试验的条件有时难以确切地叙述，例如，把爆发大战看成试验，条件应该是哪些呢？二是从条件推算出概率，也往往很不容易，演绎推理或计算，有时非常困难.

对于重复试验，如果精度要求不很高，总可以用频率逼近以

求出概率的近似值．但对非重复试验，已无频率可言；那么，有无其他近似方法呢？

一种方法是适当修改条件．设试验 E 的条件组为 C，在 C 下 E 非重复；今适当修改 C 为 C'、而在 C' 下则是可重复的，于是化归重复试验，其代价是要牺牲一些精度．采用此法时，还要求试验结果对条件不要过于敏感，即要求试验有适度的稳定性，以免开始条件"差之毫厘"，而结果却"失之千里"，出现所谓"混沌现象"．

例如，试求"地球以外存在生命"的概率．本来，每颗星球的情况千差万别，但可采用下述近似方法．限于目前科学水平，只考虑银河系．银河系中恒星数约为 3×10^{11}，其中生物可居住的行星数约为 65×10^7．这些行星中，设每颗有生命的概率不小于 ε；于是每颗星无生命之概率不大于 $1-\varepsilon$；于是 65×10^7 颗行星都无生命之概率不大于 $(1-\varepsilon)^{65\times10^7}$；于是至少还有一颗行星上有生命的概率不小于 $1-(1-\varepsilon)^{65\times10^7}$．不管 ε 如何小，只要它大于 0，最后一概率充分接近于 1，因此，我们对存在球外生命甚有信心．在这里，我们把观察 1 颗行星当作 1 次试验，并把它重复 65×10^7 次．

又如，要求出病人李某存活期的分布．通过检查，发现他的病情与其他一些人相似，而后者皆已作古，其存活期是有案可查的．根据记录可制出已作古者存活期的经验分布，于是人们便以此分布作为李某存活期分布，从而预测他还能活多少时间及对应的概率．其实李某未必与那些人情况全同，只是大体相似罢了．

保险公司也可采用其他方法，例如因素评分法，列出影响寿命的一些重要因素如心脏、血管、大脑的病变程度等；把每因素的指标分成若干等级；给每一等级评分（相当于"加权"）；最后根据李某所得总分按照某种算法以求出其存活期的分布．此法既有一定的科学道理，但也有主观性，因为评分多少以及采用什么算法都有选择的随意性．对此人们不必大惊小怪，其实许多社会活动如选拔、比赛、评估等等都离不开因素评分法，它常常能在

很大程度上反映实际情况.

除上述2种方法外，还可采用模拟方法以计算非重复事件的概率.

参考文献

[1] 田景春. 古生物大规模绝灭假说种种. 世界科学，1990，2：37

[2] Poincare H. 机遇. 数学译林，1987，6（2）：165

[3] 王梓坤. 概率论基础及其应用. 北京：科学出版社，1986.

第27篇　论混沌与随机

27.1　随机迭代与随机混沌

混沌学是一门重要的新兴学科．人们对混沌与随机性（即偶然性）的关系还众说纷纭，其原因之一在于对随机性的理解．由于对随机性的认识不同，甲说由决定性产生了随机性，而乙则说混沌绝无随机性．至今数学上刻画混沌过程都是用决定性的方程，如差分方程、微分方程等，还没有随机性的数学描述．用差分方程所作的决定性迭代是产生混沌的一种重要途径；理论上它确是决定性的，然而实际中（特别是在计算机的运算中）用的却是随机迭代．因此我们先给出随机迭代的数学模型．

以 I 表示 n 维欧氏空间 R^n 中的区间，点 $x \in R^n$ 记为 $x = (x_1, \cdots, x_n), x_i \in R^1$．设已给映射 $f: I \to I, f(x) = (f_1(x), \cdots, f_n(x))$．它把点 $x \in I$ 映射到 $f(x) \in I$．定义迭代运算

$$f^{(1)}(x) = f(x), f^{(n)}(x) = f(f^{(n-1)}(x)). \qquad (1.1)$$

$\{f^{(n)}\}$ 构成一离散动力系统，它是决定性的．

今固定始值 b_0 而定义 $x_0 = b_0$，$x_n = f(x_{n-1}) = f^{(n)}(x_0)$．称序列 $\{b_0, x_n\}$ 为自 b_0 开始的由 f 产生的轨道，或简称 b_0-轨道；它当然也是决定性的，即：任二轨道 $\{b_0, x_n\}$、$\{b_0', x_n'\}$，只要 $b_0 =$

b_0'，就有 $x_n=x_n'$，一切 $n\geqslant1$.

但在实际中，往往不能准确取定 b_0，而代之以 b_0 的某近似值 $\bar{b}_0$（例如，$b_0=\sqrt{2}$ 时，为了运用计算机，人们只得取某有理近似值如 $\bar{b}_0=1.414$），于是产生一次误差；接着，$b_1=f(\bar{b}_0)$ 也很可能需代以近似值 $\bar{b}_1$（二次误差）；于是误差不断积累，如果 f 又对始值敏感，便会产生更严重的后果，而且难以预测.

设已给向量 $a=(a_1,\cdots,a_n)\in I$ 及正数 ε，考虑 n 维正态分布 $N(a,\varepsilon)$，其密度函数为

$$f_{a,\varepsilon}(x)=(2\pi\varepsilon)^{-n/2}\cdot\prod_{i=1}^{n}\exp\left\{-\frac{(x_i-a_i)^2}{2\varepsilon}\right\}.$$

$N(a,\varepsilon)$ 在 I 上的概率记为 $M(I)=\int_I f_{a,\varepsilon}(x)dx$. 考虑函数 $g_{a,\varepsilon}(x)=f_{a,\varepsilon}(x)/M(I)$；称以 $g_{a,\varepsilon}(x)$ 为密度的概率分布为 $N(a,\varepsilon)$ 在 I 上的截尾正态分布，并记此分布为 $N_I(a,\varepsilon)$.

对已给映射 $f: I\to I$. 取始值 $b_0\in I$，从 $N_I(b_0,\varepsilon)$ 中随机抽取一向量 $\bar{b}_0$，令 $b_1=f(\bar{b}_0)$；再从 $N_I(b_1,\varepsilon)$ 中随机抽取一向量 $\bar{b}_1$，令 $b_2=f(\bar{b}_1)$；一般地，取出 b_n 后，从 $N_I(b_n,\varepsilon)$ 中随机抽取一向量 $\bar{b}_n$ 而令 $b_{n+1}=f(\bar{b}_n)$. 称 $\{b_n\}$ 为自 b_0 开始的由 f 产生的随机迭代序列，或 b_0-随机轨道. 它之所以随机，是由于多次的随机抽样.

我们来证明：$\{b_n\}$ 构成（非时齐）马尔可夫链（Markov Chain）. 实际上，当 b_i 已知为某向量时，$b_{i+1}=f(\bar{b}_i)$，而 $\bar{b}_i$ 来自母体分布 $N_I(b_i,\varepsilon)$，此分布（从而 b_{i+1}）只依赖于 b_i，而与其前之 b_0，…，b_{i-1} 无关，因而 $\{b_n\}$ 是马尔可夫链.

现在来求此链的转移概率 $P(i,b_i;i+1,A)$，它是第 i 步时位于 b_i，第 $i+1$ 步时转入集 A 中的概率. 此链第 i 步时位于 b_i 的条件概率设为 P_{i,b_i}，简记为 P，则对 $A\subset I$（A 为可测集），有

$$\begin{aligned}P(i,b_i;i+1,A)&=P(b_{i+1}\in A)=P(f(\bar{b}_i)\in A)\\&=E\chi_A(f(\bar{b}_i))=\int\chi_A(f(x))\,g_{b_i,\varepsilon}(x)\mathrm{d}x\\&=\int\chi_{f^{-1}(A)}(x)\,g_{b_i,\varepsilon}(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$= \int_{f^{-1}(A)} g_{b_i,\varepsilon}(x)\mathrm{d}x. \qquad (1.2)$$

其中 $\chi_B(y) = 1$ 或 0，视 $y \in B$ 或 $y \overline{\in} B$ 而定；又集 $f^{-1}(A) = (x : x \in I, f(x) \in A)$.

注 1.1 如取 $\varepsilon=0$，并理解 $N(a,0)$ 为集中在 a 上之单点分布 δ_a，则当 $f(b_i) \in A$ 即 $b_i \in f^{-1}(A)$ 时，形式上，由上式得

$$P(i,b_i;i+1,A) = \int_{f^{-1}(A)} \delta_{b_i}(x)dx = 1.$$

特别有 $P(i,b_i;i+1,f(b_i)) = 1$ 或 $b_{i+1} = f(b_i)$. 于是此时化为决定性迭代.

注 1.2 误差分析中常出现正态分布，所以我们也用正态分布. 其实以上推理适用于其他以 b_0 为数学期望的分布.

迄今我们对 f 未加任何条件. 在混沌学中，通常假设 f 为连续而且对始值敏感的映象，这样产生的 $\{b_n\}$ 便很可能产生混沌现象[1]. 敏感性与非线性密切相关，线性映射一般不会是敏感的.

上述模型可稍推广如下：设映射 f 还依赖于某实数 λ，$\lambda \in \Lambda \subset R^1$，$f := f(x,\lambda)$，$x \in I$，$\lambda \in \Lambda$. 当 λ_0 固定时，$f(x,\lambda_0)$ 便是 $I \to I$ 映射，于是可如上定义其随机迭代. 由随机迭代产生的混沌称为随机混沌，以区别于由决定性迭代所产生的决定性混沌. 可能当 λ 属于 Λ 的某一子集时，混沌出现，而属于另一子集时混沌不出现，而且混沌的程度随 λ 而变；这当然是非常有趣的课题. 决定性混沌可看成当 $\varepsilon=0$ 时的随机性混沌，这在注 1.1 中可以看出.

27.2 混沌、随机性与决定性

关于这方面有不少不同的、甚至截然相反的观点. 试作一简单回顾. 哲学上一个长期争论的重要问题是：世界是决定性的还是随机性的？2 种观点都各有大科学家的支持. 爱因斯坦主张前者，他说“上帝不会玩骰子”；而玻尔则回答说：“我们不能断言上帝该干什么”[2,3]. 这 2 种观点是难以调和的. 但由于混沌学的

兴起，一些人认为决定性与随机性之间的鸿沟正趋于消失：由决定性可以产生随机性，而且是内在的随机性（即不是由于外界偶然干扰所产生的外随机性）．例如，福特指出：混沌是决定性的随机性[4]．另一种说法更清楚些："混沌是决定性系统的内在随机性"．由决定性可产生随机性，确是惊人之谈．他们论证如下：迭代式 $x_{n+1}=f(x_n)$ 是决定性的，但对某些敏感函数 f，$\{x_n\}$ 当 n 很大时不可预测，因而是随机的．一个著名的例子是 Ulam von Neumann 映射 $f:(-1,1)\to(-1,1):f(x)=1-2x^2$．迭代式为

$$x_{n+1}=1-2x_n^2. \tag{2.1}$$

作变换 $x=\cos t$ 后，可解得[5] $x_n=-\cos(2^n\cos^{-1}x_0)$．如取 x_0 使 $\cos^{-1}x_0/2\pi$ 为无理数，则

$$\theta_n:=2^n\cos^{-1}x_0 \pmod{2\pi} \tag{2.2}$$

是一伪随机数列；从而 $\{x_n\}$ 亦然．注意，如 θ 在 $[0,2\pi]$ 上均匀分布，则 $x=-\cos\theta$ 有分布密度为 $1/(\pi\sqrt{1-x^2})$，故可认为 $\{x_n\}$ 来自具有密度为 $1/(\pi\sqrt{1-x^2})$ 的母体，$|x|<1$．于是，从确定系统（2.1）产生了"随机性"．

其实这是一种误解，根源在于混淆了随机性与伪随机性 2 个不同的概念，伪随机性并不等同于随机性．我们说事件 A 在某条件 C 下是随机的，是指在 C 下进行试验时，A 可能出现也可能不出现，即使在上次试验中出现了，下次中仍可不出现．例如，扔硬币这次得正面，下次未必仍得正面，所以"出现正面"是随机事件．甲扔 5 次得"正、正、反、正、反"，乙扔 5 次一般不会仍是这样，因为相同的概率只有 1/32．设 F 为某概率分布，从母体 F 中独立地抽取 m 个数 $x_1,\cdots,x_m$，称此数列为 F-随机数．此数列具有若干与 F 有关的性质 $F_1,\cdots,F_l$，例如 $(x_1+\cdots+x_m)/m$ 当 m 充分大时应接近于 F 的平均值等等．F-随机数列的一个显著特征是：设甲从 F 中抽得 $x_1,\cdots,x_m$；乙也从 F 中抽得 $y_1,\cdots,y_m$．则一般 $\{x_i\}$ 不会全同于 $\{y_i\}$，尽管它们都具有性质 $F_1,\cdots,$

F_l. 这种不可准确预测性正是"随机性"的精髓所在. 现在假设我们用某种决定性方法（例如，利用（2.1）式）也得到一列数 x'_1、…、x'_m，通过统计检验，发现 $\{x'_i\}$ 也是有性质 F_1，…，F_l；但却失去上述精髓性，也就是说，从同一始值 b_0 出发，甲、乙各用此法得 2 列 $\{x'_i\}$ 与 $\{y'_i\}$，由于方法是决定性的，故必有 $x'_i=y'_i$，$i=1$，…，m. 因此，显然不能称 $\{x'_i\}$ 为 F-随机数（或向量）列，人们便称它为 F-伪随机数列. 由此可见，（2.1）式不过是一种伪随机数"发生器"；这种发生器在 Monte-Carlo 方法中是司空见惯的.

由此可见，用决定性迭代，至多只能产生伪随机数列. 从而上述"混沌是决定性系统的内随机性"，应改为"混沌是决定性系统的伪随机性"，或者说"混沌是决定性的伪随机性".

在另一方面，一些研究者如美国圣克鲁斯加州大学动态系统研究组 4 位教授于 1987 年 4 月在 Scientific American 上发表的文章《混沌现象》中说："混沌现象是丝毫不带随机因素的固定规则所产生的"；从纯粹理论的观点看，这有一定道理，因为迭代函数 f 是决定性的，但还需要一个理想的条件，即始值及每次迭代运算都必须绝对精确，不能有丝毫误差. 但在现实中，这是做不到的. 即使在绝对精确情况下，混沌也可能有伪随机性（如（2.1）式）.

本篇只讨论一类混沌，即由差分迭代所产生的混沌. 我们认为：通常所能观察到的混沌是由随机迭代所产生的随机混沌，它是由一列随机事件（由 $N_I(b_i,\varepsilon)$ 中随机取样 $\bar{b}_i$）与决定性运算（$b_{i+1}=f(\bar{b}_i)$）串联而成：

$$b_0 \to \bar{b}_0 \to b_1 = f(\bar{b}_0) \to \bar{b}_1 \to b_2 = f(\bar{b}_1) \to \cdots$$

其中 f：$I \to I$ 为连续、非线性、敏感映射.

在文献 [3，6] 中，作者论述了许多过程都是随机事件与必然事件相互串联（及并联）的过程；这个论点在混沌学中找到了新的强有力的支持.

参考文献

[1] Falconer K. 分形几何. 曾文曲译. 沈阳：东北工学院出版社，1991

[2] Galder N. 生命的偶然性. 世界科学，1987（1）：10

[3] 王梓坤. 论随机性. 北京师范大学学报（自然科学版），1991，27（1）：119

[4] Ford J. Directions in classical chaos. In Directions in *Chaos*, 1987(1): 1

[5] 陈式刚. 映象与混沌. 北京：国防工业出版社，1992

[6] 王梓坤. 迭代、混沌与随机性. 数理统计与应用概率，1993（增刊）：1

第6卷

今日数学

第1至4卷均属于对数学的专门分支主要是对马尔可夫过程的研究. 第5卷则是离开数学专门分支站在哲学的高度探讨随机性、必然性、混沌等哲学问题. 本卷则是站在更高的高度即在数学的全部专门分支之上，对整个数学特别是今日数学的新认识.

本卷只含第28篇. 该篇详细地论述了在现今高科技时代的今日数学的新特点，今日数学在科学、技术、社会生活的各个方面的广泛和有效的应用，并为加速发展我国的数学学科提出了很好的建议. 本篇是作者受中国科学院数理学部委托而执笔起草的报告，目的在于提高人们特别是高层领导人对今日数学的认识，以更快地发展我国的数学学科. 它首先发表于《数学通报》1994年

第7期，该刊编者加了按语："这是王梓坤院士执笔为中国科学院数学物理学部写的报告．对数学在国富民强中的意义，用大量数学中的成就和精辟的分析作了雄辩的论证，对数学科学和数学教育的发展都有重大的指导意义．本篇征得作者同意，特在此公开发表．"全篇分四部分．第一部分首先论述了对数学的几点新认识，然后论述了数学是什么，数学的成分，数学的特点以及现代数学的特点，最后论述了数学的发展趋势．第二部分列举了一些60年代以后数学的若干重大应用，以说明宇宙之大、火箭之速、化工之巧、地球之变、生物之谜、日用之繁等各个方面中，无处不有数学的重要贡献．甚至，有些重要问题的解决，数学方法是唯一的，也就是说，除数学外，任何其他方法、仪器、手段都会一筹莫展．第三部分叙述了我国近些年来在数学应用中取得的部分成绩，主要列举了16项．第四部分对如何发展我国数学科学提出一些建议，为使我国成为数学强国而奋斗．

第28篇　今日数学及其应用

本篇的目的是双重和互补的：一是论述数学在国富民强中的重要意义；二是通过近年来数学在我国的许多应用来证实这种意义的真实性，从而希望提高人们对数学的认识.

数学与人类文明同样古老，有文明就必须有数学，缺乏数学不可能有科学的文明，数学与文明同生并存以至千古. 然而一些人对数学的认识却并未达到应有的高度，他们的眼光受到局部的、短暂的急功好利的限制；只有从国富民强的广阔视野中来考察和研究数学，才能得到正确的符合实际的认识. 在我国，邓小平同志提出“**科学技术是第一生产力**”的著名论断是十分正确的. 在美国，科学院院士 J. G. Glimm 也曾幽默地说过：40 年前，中国有句名言：“枪杆子里面出政权”；而从 90 年代起，在全球应是“**科学技术出政权**”. 的确，近现代世界史证实：“国家的繁荣昌盛，关键在于高新科技的发达和经济管理的高效率”；“**高新科技的基础是应用科学，而应用科学的基础是数学**”. 这一历史性结论充分说明了数学对国家建设的重要作用. 其次，由于计算机的出现，**今日数学已不仅是一门科学，还是一种普适性的技术**：从航天到家庭，从宇宙到原子，从大型工程到工商管理，无一不受惠于数学技术. **因而今日的数学兼有科学与技术的两种品质，这是其他学科所少有的. 数学对国家的贡献不仅在于国富，而且还在于民强. 数学给予人们的不只是知识，更重要的是能力，这种能力包括直**

观思维、逻辑推理、精确计算和准确判断. 因此，数学科学在提高民族的科学和文化素质中处于极为重要的地位. 有关的进一步阐述请见本篇第一部分；那里还谈到爱因斯坦的见解、数学与Nobel经济奖、数学的特点、发展趋势等等.

1959年5月，华罗庚教授在《人民日报》发表了《大哉数学之为用》，精采地叙述数学在"宇宙之大、粒子之微、火箭之速、化工之巧、地球之变、生物之谜、日用之繁"等各方面的应用，很难讲得更全面了. 本篇第二部分补充了60年代以后的若干应用，从中可以看到，**某些重大问题的解决，数学方法是唯一的，非此"君"莫属**. 也就是说，除数学外，用任何其他方法、仪器和手段，都会一筹莫展. **作为重要的例子可举"沙漠风暴"**：1990年伊拉克点燃了科威特数百口油井，浓烟遮天蔽日；美国在"沙漠风暴"前曾考虑点燃所有油井的后果而求教于太平洋-赛拉研究公司；该公司利用Navier-Stokes方程等作为计算模型，在进行一系列模拟计算后得出结论：大火的烟雾可能招致重大的污染，但不会失去控制，不会造成全球性气候变化……这样才促使美国下定决心. 所以有人说第一次世界大战是化学战（火药），第二次是物理战（原子弹），海湾战争是数学战. 本篇第二章中还有一些远非八股文章的有趣故事，可供一读.

第三部分是本篇的重点，其中叙述了近年来我国在数学应用中所取得的部分成绩，这些材料是由许多研究所、大学和生产部门书面提供的. 应用的范围包括：优化、控制与统筹，设计与制造，质量控制，预测与管理，信息处理，大型工程，资源开发与环境保护，农业经济，机器证明，新计算方法，数学物理，最短网络，几何设计，模糊推理，军事与国防，其他，共16项. 我们希望，这些材料会使读者产生这样的印象：**数学对我国现代化所起的作用是多方面的、深刻的、富有成效的，而且往往是其他方法所不能替代的.**

第四部分对如何发展我国的数学科学提出一些建议. 三年前*在

* 此会于1991年5月19日至21日在南开大学举行. ——编者

南开大学举行的"21世纪中国数学展望"会上，数学大师陈省身教授及与会专家认为："**数学是我国人民擅长的学科；我国完全有希望在21世纪前期成为数学大国、数学强国；数学应该率先赶超国际先进水平.**"近年来我国数学工作者所取得的许多成绩预示这一理想的现实性. 尤其是最近三届国际奥林匹克数学竞赛，我国连获团体冠军，个人金牌获得数也名列前茅. 每次消息传来，人心振奋，我国数学界现在有能人，后继有强手. 如果能得到党、政领导和全国人民更多的支持，上述奋斗目标是完全可以实现的.

28.1 数学科学、高新科技与国家富强

1. 对数学的新识识之一 "**国家的繁荣富强，关键在于高新的科技和高效率的经济管理.**" 这是当代有识之士的一个共同见解，也已为各发达国家的历史所证实. 在我国，邓小平同志把科技对生产建设的重要性提到前所未有的高度，他提出的"**科学技术是第一生产力**"的论断是非常正确的. 在美国，科学院院士J. G. Glimm也曾幽默地说过：40年前，中国有句话说"枪杆子里面出政权". 而从90年代起，在全球应是"**科学技术里面出政权**". 他的话反映了国外许多人士对科技重要性的新认识. 从最近海湾战争可以看出，**高技术是保持国家竞争力的关键因素**. "**高新技术的基础是应用科学，而应用科学的基础是数学**". 这句话把数学对高新技术的作用，从而对国富民强的作用，清楚地表达出来. 当代科技的一个突出特点是定量化. 人们在许多现代化的设计和控制中，从一个大工程的战略计划、新产品的制作、成本的结算、施工、验收，直到贮存、运输、销售和维修等等都必须十分精确地规定大小、方位、时间、速度、成本等数字指标. 精确定量思维是对当代科技人员共同的要求. **所谓定量思维是指人们从实际中提炼数学问题，抽象化为数学模型，用数学计算求出此模型的解或近似解，然后回到现实中进行检验，必要时修改模型使之更切合实际，最后编**

制解题的软件包、以便得到更广泛的方便的应用.

2. 新认识之二 数学科学对经济发展和竞争十分重要. 好的经济工作者决不止是定性思维者，他不能只满足于粗线条的大致估计，而必须同时是一位定量思维者. **数学科学不仅帮助人们在经营中获利、而且给予人们以能力、包括直观思维、逻辑推理、精确计算以及结论的明确无误.** 这些都是精明的经济工作者和科技人员所应具备的工作素质；大而言之，也是每个公民的科学文化素质. 所以**数学科学对提高一个民族的科学和文化素质起着非常重要的作用.**

3. 新认识之三 **"高技术本质上是一种数学技术."** 这种观点已为越来越多的人所接受. 许多西方公司意识到：利用计算技术去解决复杂的方程和最优化问题，已改变了工业过程的组织和新产品的设计. 数学大大地增强了他们在经济竞争中的力量. 无怪乎美国科学院院士 J. G. Glimm 不仅**称数学为非常重要的科学，而且说它是授予人以能力的技术.** 他说：**"数学对经济竞争力至为重要，数学是一种关键的普遍适用的，并授予人以能力的技术."** 时至今日，**数学已兼有科学与技术两种品质，这是其他学科所难的，不可不知.**

由于对数学重要性的重新认识，在欧洲建立了"欧洲工业数学联合会"，以加强数学与工业的联系，同时培养工业数学家去满足工业对数学的要求. 在一篇有关的报告中，列举了欧洲工业中提出的 20 个数学问题，其中包括：**齿轮设计、冷轧钢板的焊接、海堤安全高度的计算、密码问题、自动生产线的设计、化工厂中定常态的决定、连续铸造的控制、霜冻起伏的预测、发动机中汽轮机构件的排列、电化学绘图等等.**

4. 数学与 Nobel 经济奖 数学对经济学的发展起了很大的作用. 今天，**一位不懂数学的经济学家决不会成为杰出的经济学家. 1969 至 1981 年间颁发的 13 个诺贝尔经济学奖中，有 7 个获奖工作是相当数学化的.** 其中有 Kantorovich"由于对物资最优调拨理论的贡献"而获 1975 年奖，Klein"设计预测经济变动的计算机模

式”（获 1980 年奖），Tobin“投资决策的数学模型”（获 1981 年奖）等等. **在经济学中，用到的数学非常广泛，有的还很精深**. 其中包括线性规划、几何规划、非线性规划、不动点定理、变分法、控制理论、动态规划、凸集理论、概率论、数理统计、随机过程、有限结构（图论、格论）、矩阵论、微分方程、对策论、多值函数、集值测度，以及 Arrow 的合理意图次序理论等等，它们应用于经济学的许多部门，特别是数理经济学和计量经济学.

5. 爱因斯坦的见解 在数学与其他科学的关系方面，培根曾说数学是“**通向科学大门的钥匙**”；伽利略说“**自然界的伟大的书是用数学语言写成的**”. 物理定律，以及科学的许多最基本的原理，全是用数学语言表示的. **引力的思想早已有之，但只有当牛顿用精确的数学公式表达时，才成为科学中最重要、最著名的万有引力定律**. 另一位物理大师爱因斯坦认为，“**理论物理学家越来越不得不服从于纯数学的形式的支配**”；他还认定理论物理的“**创造性原则寓于数学之中**”. 他自己的工作证实了这一思想，正是黎曼几何为广义相对论提供了数学框架. 科学大师们的工作和思想，引导到如下的信念：“**我们生活在受精确的数学定律制约的宇宙之中**”，正是这种制约使得世界成为可认识的. 世界可知是唯物认识论中的最重要的原理.

6. 数学是什么 恩格斯说：**数学是研究现实中数量关系和空间形式的科学**. 虽然时间已过去一百多年，这一答案大体上还是恰当的，不过应该把“数量”和“空间”作广义的理解. 数量不仅是实数，而且是向量、张量，甚至是有代数结构的抽象集合中的元；而空间也不只是三维空间，还有 n 维、无穷维以及具有某种结构的抽象空间. 这样，恩格斯的答案已基本上包含了数学的主要内容，尽管还有一些重要的篇章如数理逻辑等包不进去.

7. 数学的特点 数学的特点是：**内容的抽象性、应用的广泛性、推理的严谨性和结论的明确性**. 数学虽不研究事物的质，但任一事物必有量和形，所以**数学是无处不在、无时不用的**. 两种事物，如果有相同的量或形，便可用相同的数学方法，因而数学

必然、也必需是抽象的. 同一个拉普拉斯（Laplace）方程，既可用来表示热平衡态，溶质动态平衡，弹性膜的平衡位置，也可表示静态电磁场，真空中的引力势等等. 数学中严谨的推理和一丝不苟的计算，使得**每一数学结论不可动摇**. 这种思想方法不仅培养了数学家，也有助于提高全人民的科学文化素质，它是人类巨大的精神财富. 爱因斯坦关于欧氏几何曾说：**"世界第一次目睹了一个逻辑体系的奇迹，这个逻辑体系如此精密地一步一步推进，以致它每一个命题都是绝对不容置疑的——我这里说的是欧几里得几何. 推理的这种可赞叹的胜利，使人类的理智获得了为取得以后成就所必需的信心."**

8. 数学的成分 数学大体上可分为三大部分：**基础数学、应用数学和计算数学. 基础数学是数学中的核心，也是最纯粹最抽象的部分**. 它大致由三个分支组成：**分析、代数和几何**. 这三者又相互交叉和渗透，从而产生解析几何、解析数论、代数几何等学科. 此外，研究随机现象的概率论，研究形式推理的数理逻辑等，也属于基础数学.

应用数学研究现实中具体的数学问题，它既采用基础数学的成果，同时又反过来从实际中提炼问题、探讨新思想和新方法以丰富基础数学. 数学应用的领域虽无边际，但大致也可分为三方面：**经济建设（工、农、商等）；科学与技术（特别是高科技）；军事与国防**，详述见后. 运筹学、控制论与数理统计等学科中，大部分内容属于应用数学，而经济数学、生物数学等，则是比较标准的应用数学学科.

计算数学偏重于计算，早期它致力于求出各种方程（代数方程、（偏）微分方程、微积分方程等）的数值解. 近 40 年来，计算数学有了极其迅速的发展，这主要是由于电子计算机的出现. 计算机的高速计算使得许多过去无法求解的问题成为可解，从而大大扩展了数学的应用范围. 例如，短期天气预报、高速运行器的控制，离开计算数学和计算机是不可能的. 近期，由于计算模拟、计算辅助证明（如四色问题的证实）在人工智能中的应用，以及

计算力学、计算物理、计算化学、计算几何、计算概率等新学科的诞生等等，使得计算数学雄风大振. 今天，**人们已把计算作为与理论、实验鼎足而立的第三种科学方法而引入科学界.**

基础数学、应用数学与计算数学既有各自的特点又紧密相互联系. 一个重大的数学问题，特别是从实际中提出的数学问题，都需要上述三种数学的内容和方法. 建立数学模型，寻求解题方法，需要基础数学和应用数学，而使解题方法得以实现，则离不开计算数学. 这三种数学互相补充、互相渗透，大大地促进了整个数学科学的发展.

9. 现代数学的新特点　数学内部各分支间的相互渗透、数学与其他科学（如控制论）的相互渗透、电子计算机的出现，正是当代数学三个新的特点. 由于相互渗透而导致许多新问题和古老难题的解决，其成绩往往出乎意外而使人惊异. 例如，对素数的研究以往认为很少有实用价值，却不料它在密码学中受到重用. 密码学认为，千位以上的整数的素因子分解，几十年内在计算上不可能实现. 但荷兰数学家得到了一个当前最好的因子分解算法，这严重地冲击了上述想法和密码的安全性. 又如泛函分析中的无穷维 Von Neumann 代数解决了拓扑学中三维空间中打结理论中一些难题. 描写孤立波的 KdV 方程用于代数中，解决了 Riemann 提出的一个重要问题. 描写随机现象的 Malliavin 演算给出了著名的 Atiyah-Singer 指数定理的新证明，并推广了这一定理. 更使人感叹的是物理中的杨振宁-米尔斯规范场与陈省身研究的纤维丛间的紧密联系，二者间的主要术语竟可一一对应. 例如，规范形式—主纤维丛、规范势—主纤维丛上的连络、相因子—平行移动、电磁作用—$U(1)$ 丛上的连络等等. 无怪乎杨振宁说：“**我非常惊奇地发现，规范场就是纤维丛的连络，而数学家们在提出纤维丛上的连络时，并未涉及到物理世界.**”

学科间的相互渗透是当今各门科学技术高速发展的必然后果，也是重要原因：只有置身于众多高新科技急剧发展的大背景中，数学内、外部的相互渗透才是可能的，也是容易理解的.

10. 数学发展的趋势 今后数学的发展必然比最近数十年更迅速，成绩更巨大．科学技术越积累，人类认识、利用和改造自然的能力越增长，科学技术便越快发展，形成一良性循环．作为其中一部分，数学也必然如此．总体上，高速发展是完全可以预言的；但至于哪些分支发展得更快些，更好些，则既依赖于该学科本身的活力又依赖于科技大背景的波动和社会的需要，难以肯定回答．不过从目前的情况看，**非线性数学是一重要发展方向**．线性方程的特征是叠加原理成立；如 φ_1、φ_2 是方程的两个解，则 $a_1\varphi_1+a_2\varphi_2$ 也是解，其中 a_1，a_2 是常数．例如薛定谔方程

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial t}=H\varphi,$$

或拉普拉斯方程

$$\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2}=0$$

都是线性的．线性数学比较成熟．但还有许多问题是非线性的，如牛顿引力论中的基本定律是平方反比关系，粮食产量对肥料未必成正比等．引人注目的冲击波、孤立子、混沌现象、n 体问题等都是非线性的．非线性问题，不仅涉及面广，而且难度也大，这反而更能引发人们研究的兴趣．

除去非线性数学外，离散数学（涉及数论、抽象代数、数理逻辑、组合论、图论、博奕论、规划论等），概率论与数理统计、计算数学，以及数学对生物学、经济学、语言学、管理学、控制论、复杂性等的渗透和应用，都会有更大的发展．其他数学也同样会有迅速的进展；甚至会爆出新的、出人意料的大冷门；“晴空一鹤排云上，更引诗情到碧霄”，这也是非常可能的．

28.2 大哉数学之为用

1959 年 5 月，华罗庚教授在《人民日报》上发表了《大哉数

学之为用》，精采地叙述了数学的各种应用：宇宙之大、粒子之微、火箭之速、化工之巧、地球之变、生物之谜、日用之繁等各个方面，无处不有数学的重要贡献．很难有比这篇文章写得更全面的了．下面只举些60年代以后数学的若干重大应用，以见一斑．**我们会看到，有些重要问题的解决，数学方法是唯一的，也就是说，除数学外，用任何其他方法、仪器、手段都会一筹莫展．**

1．"沙漠风暴"与数学战　1990年伊拉克点燃了科威特的数百口油井，浓烟遮天蔽日．美国及其盟军在"沙漠风暴"以前，曾严肃地考虑点燃所有油井的后果．据美国《超级计算评论》杂志披露，五角大楼要求太平洋-赛拉研究公司研究此问题．该公司利用Navier-Stokes方程和有热损失能量方程作为计算模型，在进行一系列模拟计算后得出结论：大火的烟雾可能招致一场重大的污染事件，它将波及到波斯湾、伊朗南部、巴基斯坦和印度北部，但不会失去控制，不会造成全球性的气候变化，不会对地球的生态和经济系统造成不可挽回的损失．这样才促成美国下定决心．**所以人们说第一次世界大战是化学战（火药），第二次是物理战（原子弹），海湾战争是数学战．**

数学在军事方面的应用不可忽视．再举三个例子，海湾战争中，美国将大批人员和物资调运到位，只用了短短一个月时间．这是由于他们运用了运筹学和优化技术．另一例是：采用可靠性方法，美国研制MZ导弹的发射试验从原来的36次减少为25次，可靠性却从72%提高到93%．再者，我国造原子弹，试验为西方1/10，从原子弹到氢弹只用2年3个月，重要原因之一是有许多优秀数学家参加了工作．

2．太阳系是稳定的吗　地球的前途如何？好一个虽然遥远却非常有趣而重要的问题．将来太阳系是否会保持现状？是否有某行星脱离太阳系？行星间是否会碰撞？**数学证明，太阳系在相当长时间内是稳定的，至少10亿年内如此．**科学家还用计算模拟以研究恒星消亡过程．太阳最后变成一颗白矮星；但一颗质量约为8—10倍于太阳的恒星则会发生超新星爆炸：由于热源枯竭而收

缩到一个小城市大小，密度达到原来的100万亿倍. 这些物质产生巨大的刚性反弹而爆炸，恒星外壳被炸掉而剩下的残余成为中子星. 天文学是数学的重要用武场所，1846年勒维耶通过计算在笔尖上发现海王星，在科学史上传为佳话. 在多体问题的研究中，由于初始条件不同，多体系统的运动或表现为规则的，或表现为混沌的. 行星沿椭圆运动是规则运动的例子，而小行星在Kirk-wook窗口的运动是混沌运动的例子：与木星的共振相互作用导致偏心率随机的变化，有时朝这一方向，有时朝另一方向；无规则变化的偏心率可能变得很大，这时小行星便可能陨落，例如落到火星上.

3. 石油勘探　这是数学取得重大经济效益的应用场所之一. 石油深藏地下，人们通过人工地震记下反射回来的地震波，波形随着地层地质的不同而变化. 用计算机处理所得的波形数据可以提供地下岩层、岩性以及有关石油、天燃气等的知识. 1991年5月，美国壳牌石油公司应用计算技术于新奥尔良以南39公里的河流之下930公里处，探明了一个储量超过十亿桶的大油田. 我国在这方面也做了许多工作（见后）. 在数据处理中，Wiener滤波起到重要作用.

4. DNA与CT　如果说二次大战以前，数学主要用于天文、物理，那么，现在数学已深入到化学、生物和经济、管理等社会科学中. 例如，DNA是分子生物学的重要研究对象，是遗传信息的携带者，它具有一种特别的立体结构——双螺旋结构，后者在细胞核中呈扭曲、绞拧、打结和圈套等形状，这正好是数学中的纽结理论研究的对象. 北京大学姜伯驹教授对此深有研究. 下面两项有关生物、医学和化学的高技术中，数学起着关键性作用. X射线计算机层析摄影仪（简称CT）的问世是本世纪医学中的奇迹，其原理是基于不同的物质有不同的X射线衰减系数. 如果能够确定人体的衰减系数的分布，就能重建其断层或三维图象. 但通过X射线透射时，只能测量到人体的直线上的X射线衰减系数的平均值（是一积分）. 当直线变化时，此平均值（依赖于某参数）也

随之变化. 能否通过此平均值以求出整个衰减系数的分布呢? 人们利用数学中的 Radon 变换解决了此问题, Radon 变换已成为 CT 理论的核心. 首创 CT 理论的 A. M. Cormark (美) 及第一台 CT 制作者 C. N. Hounsfield (英) 因而荣获 1979 年诺贝尔医学和生理学奖. 另一项高技术是 H. Hauptman 与 J. Karle 合作, 发明了测定分子结构的新方法, 利用它可以直接显示被 X 射线透射的分子的立体结构. 人们应用此方法, 并结合利用计算机, 已测出包括维生素、激素等数万种分子结构, 推动了有机化学、药物学和生物学等的发展; 两发明人分享了 1985 年的诺贝尔化学奖. 由此可见在此两项技术中数学的关键作用.

5. 飞机制造　制造业中广泛地用到数学. 今以飞机为例. 设计师必须考虑结构强度与稳定性, 这是用有限元来分析的, 而机翼的振动情况则需解特征值问题; 为了使飞机省油与提高速度必需找到一种最佳机翼和整个机体的形状; 如何为飞行员选择最优控制参数, 也是必须考虑的问题. 飞机设计在极大程度上以计算为基础, 人们研究描绘机翼和整个机体附近气流的方程. 工程设计和制造工艺主要靠计算机辅助设计 (CAD) 和计算机辅助制造 (CAM) 两大工具, 而这两者又都以数学为理论基础. 计算流体力学可以帮助人们设计新的飞行器. 数学模型已代替了许多的实验, 如风洞实验, 既便宜、省时, 又有适用性、安全性. 以前利用风洞设计飞机某一部件, 若要改变某一部位, 必须在机械车间建一模型; 而今天设计一数学模型, 只要通过键盘打进新的参数即可. 自动导航与自动着陆系统是根据卡尔曼滤波的方法设计的, 而后者主要又是数学. 在涡轮机、压气机、内燃机、发电机、数据存储磁盘、大规模集成电路、汽车车身、船体等的设计中, 也都用到了类似的先进数学设计方法.

6. Hardy 的故事　G. H. Hardy (1877~1947) 是英国著名的数学家, 他推崇数学的"纯粹"和"美", 认为数学是一种永久性的艺术品. 他从不谈 (甚至轻视) 数学的应用, 他写道: "我从不干任何'有用'的事情, 我的任何一项发现都没有, 或者说不

可能给这个世界的安逸带来最细微的变化……他们（指某些数学家）的工作，也和我的同样无用."**但他万万没有想到，1908年他发表的一篇短文却在群体遗传学中得到重要应用**. 那篇文章可直观地解释如下：人的某种遗传病（如色盲），在一群体中是否会由于一代一代地遗传而患者越来越多？20世纪初有些生物学家认为确会如此，如果这样，那么势必后代每个人都会成为患者. Hardy利用简单的概率运算，指出这种说法是错误的. **他证明了：患者的分布是平稳的，不随时间而改变**. 差不多同时，德国的一位医师 Weinberg 也得到同样的结论. 这一发现被称为 Hardy-Weinberg 定律.

7. 高超的数学工具——在宏观经济中的应用 宏观经济学研究经济综合指标的控制，例如研究失业、价格水平以及收支平衡的控制等. 而微观经济学是在买方和卖方的水平，讨论消费与生产中的选择问题. 1972年以来，承担调整美国经济的政府机构联邦储备局，以最优控制方法，特别是线性二次方法为背景，提出了包括失业与通货膨胀平衡的政策建议. 1973年，《商业周刊》登了一篇文章，概述了最优控制在经济学中的潜在作用，文章说：**"你如何努力地及时地刹住过于繁荣的经济，而又不至于滑入灾难性衰退的危险之中……美国的决策者们恰好面临这种情形，而从经济学家那里极少得到明确的建议……对这种两难的情况，可从最优控制理论得到方法上的帮助."** 利用控制理论和梯度法，**人们求解了南朝鲜经济的最优计划模型**（参考 Econometrica, Vol. 33, May, 1970, D. Kendrick 等的文章）. 美国、加拿大、智利等也有类似的经济模型.

8. 提高产品质量——数学在微观经济学中的应用 数理统计学的应用极为广泛，它的优势是从有限次的观察或实验中提取重要的信息. 数理统计中的篇章"实验设计"、"质量控制（QC）"、"多元分析"等对提高产品的质量往往能起到重要的作用. 一家美国电视机制造公司被日本人买下，这家公司的废品率非常高. 通过运用QC后，废品率下降到2%. 下面的例子说明美国电话电报

公司如何使用QC以提高质量，问题是关于自动化装配线. 这一装配线由几个机件组成，其生产率出奇的低，而人们又找不出原因. QC方法首先是收集数据以确定失败模式，很快找出问题的症结是生产线上所用的塑料成分的尺度变化太大；这些塑料部件过分弯曲；金属元件间的焊接点过厚，使机件运行阻塞. 经过一年的改进，生产率增加121%，工作时间减少61%，产品成功率从90%增到98%.

一般地，某产品的质量依赖于若干个因素（原料、工艺时间等等），每一因素又有若干种可能的选择，如何挑出最优的选择搭配以求获得最佳的产品，是统计实验设计(SED)的主要研究问题. SED有一段发展史. 20年代，R. A. Fisher在农业中运用SED，取得前所未有的成功. 20年代中叶，蒂皮特运用SED于棉纺工业，随后又用于化学和制药工业. 50年代，美国戴明把SED介绍到日本，对日本制造业产生很大影响，日本工程师田口用此法以减小产品性能异性从而提高产品质量. 日本工业广泛运用统计质量控制，后又发展成全面质量管理，这项措施大大提高了日本产品的质量，在国际上最有竞争力，引起了巨大的反响. 80年代，许多美国工业公司通过田口把统计方法用到设计和制造中，产品质量不断地得以提高.

28.3 近年来数学在我国的应用

1992年9月，"中国工业与应用数学学会"召开了第二次大会，会上李大潜教授宣读了《努力发展中国的工业与应用数学》的报告，其中叙述了我国应用数学的新进展. 本节便以这篇报告为基础，补充若干新材料. 后者是由一些研究所和大学所提供的，自然是挂一漏万. 如前所述，**数学应用可分成在经济建设（1～8段）、科学技术（9～14，16）、军事与安全（15）三者中的应用.**

1. 优化、控制与统筹 人们希望在一定条件下，在多种策略

中选取其一以获得最大利益；数学上，这要求目标函数（代表利益）达到极大. 目标函数也可代表损失，于是要求它达到极小. 这类问题往往化为求目标函数的条件极值，或者化为变分问题. 优选法、线性规划、非线性规划、最优控制等，都致力于研究优化问题. 如果有好几件工作要做，便发生如何合理安排，以使收效最大（时间最短、劳力或成本最省等），这是统筹（或运筹等）的研究对象. 70年代，华罗庚教授登高一呼，并且亲自动手，率领研究小组，深入到工厂、农村、矿山，大力推广优选法与统筹法，足迹遍及23个省市，成果遍及许多行业，解决了许多问题. 例如，纺织业中提高织机效率与染色质量，减少细纱断头率；电子行业中试制新的160V电容器，使100万米废钼丝复活；农业中提高加工中的出米率、出油率、出酒率等等. 目前张里千、陈希孺教授等正在开展的现场统计，对国家经济建设也起了很好作用.

由于改善数学模型，运用最优控制理论和改进计算方法，生产过程和工艺参数的优化已在钢铁、冶金、电力、石油化工中取得很好效果. 武汉钢铁公司、上海石油化工总厂、南京炼油厂、燕山石化公司通过上述优化技术，提高生产率最高可达到20%，一套装置每年可增加几百万元的经济效益. 攀枝花钢铁公司建立了提钒工艺流程系统优化的数学模型，进行全面调优后使钒的回收率达到国际水平，使我国从钒进口国一跃而为钒出口国. 云南大学统计系运用多元回归分析研究钢的成分与性能关系，使昆明钢铁厂甲类镇静钢的合格率由原来的40%—81%提高到95%以上. 华东师大数学系与上钢五厂合作，利用自适应技术，使力学蠕变炉温度调节由6—7小时减少为2—3小时，控制精度由±4℃提高到±2℃，并使罩式退火的保温时间缩短5%—20%，提高了炉温控制精度，保证了退火质量. 上海科技大学数学系用最优化数学，制成“E型电源变压器计算机优化设计系统”，可缩短设计周期，节约生产成本.

现代大型工业是多线路的联合作业，成为一完整的系统，因而产生系统的控制问题. 在化工联合企业，半导体集成电路，电

力传输系统、电话网络、空间站等方面都有此问题. 上海石化总厂采用网络优化，建立了用电子计算机编制共四级（总厂、分厂、车间、机台）设备的大修网络计划体系. 清华大学关于电力系统过渡过程的研究，相当巧妙地运用微分几何，取得了很好的经济效益，在国际上领先，曾荣获国家自然科学二等奖.

曲阜师范大学自动化研究所应用数学方法，对汽车发动机的调温器进行研究，提高了调温器的质量，从而延长发动机的寿命，并节约耗油量. 他们还采用随机线性模型及定积分近似算法，提高了碘镓灯生厂晒版机的质量，产品进入了国际市场；此外，他们制成智能广义预测鲁棒控制器，可用于生产过程中温度、压力的控制；他们还将山东机床附件厂的车间、生产、财务、销售、人事、动力等八个点实行计算机联网，进行优化管理.

运筹学起源于“二战”中军需供应管理，主要应用于工商经营部门和交通运输以对生产结构、管理关系、人事组合、运输线路等进行优化. 应用数学所运用运筹学指导全国原油合理分配和石油产品合理调运，年增效益 2 亿元；另外，他们所发展的下料方法可节省原材料 10%—15%. 上海石油化工总厂、镇海石化总厂等运用运筹方法，每年可增加利税数百万乃至千万元. 华南理工大学和甘肃外贸局合作，建立新的存贮数学模型和管理决策原则，每年可节省存贮费用近百万元.

2. 设计与制造　工程的设计与建造、产品的设计与制造是国民经济的重要支柱，也是数学大可用武之领域. 随着电子计算机技术的飞速发展，数学在制造业中的应用进入了新阶段. 波音 767 飞机的成功设计，与应用数学家 Garabedian 对跨音速流和激波进行的计算密切相关，由此设计出了防激波的飞机翼型. **目前以 CAD 和 CAM 技术为标志的设计革命正波及整个制造业.** CAD 是数学设计技术和计算机技术相结合的产物. **我国在老一辈数学家苏步青教授的亲自开拓和大力倡导下，许多数学家在几何造型方面做了大量的工作，所取得的成果已成功地应用于飞机、汽车、船体、机械、模具、服装、首饰等的设计. 南开大学吴大任、严志**

达教授等在船体放样及齿轮设计上也做了很好的工作.

复旦大学数学系与工程人员合作，对内燃机配气机构建立新的数学模型，发展了新的数学方法，使用此法可以省油降低噪声和抑制排污，有很好的经济效益，曾获国家科技进步一等奖. 上海应用数学咨询开发中心等开发研制服装 CAD 系统，为服装行业创汇提供了基础.

3. 质量控制 提高产品质量是国民经济中的一个关键问题. “二战”中由于对军用产品的高质量要求，特别是对复杂武器系统性能的可靠性要求，产生了可靠性、抽样检查、质量控制等新的数学方法，这些方法在美国、日本等国家取得了巨大的成功. 从60年代中期开始，我国应用推广质量控制等统计方法到工业、农业等部门，收到良好的效果，以手表、电视机为代表的机电产品的质量得到明显提高. 清华大学、天津大学等研究了裂纹的扩展过程，有助于改善产品. 同时，我国还制订了一系列质量控制的国家标准，对产品的质量提出了明确的要求.

4. 预测与管理 自然科学的主要任务是预测、预见各种自然现象. 在经济和管理中，预测也非常重要，**数学是预测的重要武器，而预测则是管理**（资金的投放、商品的产销、人员的组织等）**的依据**. 我国数学工作者在天气、台风、地震、病虫害、鱼群、海浪等方面进行过大量的统计预测. **中科院系统所对我国粮食产量的预测**，获得很好的结果，**连续 11 年的预测产量与实际产量平均误差只有 1%**. 上海经济信息中心对上海的经济增长进行预测，连续多年预测的误差都不超过 5%. 云南大学统计系运用多元分析和稳健统计技术，通过计算机进行了地质数据处理和矿床统计预测.

为了配合机构改革，中科院应用数学所周子康等完成了“中国地方政府编制管理定量分析”的研究，建立了编制与相关因素分析模型等五组数学模型，构成了同级地方政府编制管理辅助决策分析体系，使编制管理科学化、现代化.

5. 信息处理 在无线电通讯中运用数学由来已久，编译码、

滤波、呼唤排队等是传统的问题. 近年来，长途电话网络系统中出现的数学问题更为可观，例如，需要用数目巨大得惊人的线性方程组来描述系统的操作性能；一般的数值法对它们毫无用处，人们不得不用很大力气来设计一些新算法. 北京大学在信息处理方面，做了很多工作：他们研究的计算机指纹自动识别，效率远高于国际上通行的方法；研究成功新的一代的图象数据压缩技术，压缩比指标达 150 倍，而传统的 JPEG 国际标准算法只能达 30 倍；研究计算机视觉，创造了从单幅图象定量恢复三维形态的代数方法；应用模式认别和信息论，在时间序列和信号分析的研究中取得新的进展；应用代数编码，使计算机本身具有误差检测能力，以提高计算机的可靠性.

6. 大型工程 工程设计以周密的计算、精确的数据为基础，大型工程尤其如此. 中国科学院计算中心早在 60 年代，运用冯康教授等创立的有限元法，设计了一批工程计算专用程序，在国家重点工程建设中发挥了作用. 他们先后完成 23 个工程建筑的设计，解决重大工程技术问题 58 项，并对 18 座水坝工程进行过计算，其中包括葛洲坝工程、新丰江大坝、白山电站、长湖水电站等. 与此同时还进行了技术转让，造就了一批专门人才，发表了许多有价值的论文.

中国科学院武汉数学物理研究所仔细研究古老而又青春长驻的都江堰渠道工程. 根据历史典籍、数学模型与实例资料，揭示了此项工程的系统科学原理，阐明了它“千年不衰”的原因；并提出了发展开拓这一古老工程的具体建议；在此基础上他们扩大战果，提出了可行的、合理的《都江堰集中调度系统》数学模型与优化决策算法结构，其中包括水情预报模型、需水模型等等. 原则上他们的研究成果可适用于一切灌溉水系及“流系系统”（如交通运输流、金融财政流、商品供销流等）的调度与规划.

三峡水利工程是举世关注的超大型工程，其中一个严重的施工问题是大体积混凝土在凝结过程中化学反应产生的热，它使得坝体产生不均匀应力，甚至形成裂缝，危害大坝安全. 以往的办

法是花大量财力进行事后修补．现在我国已研制成可以动态模拟混凝土施工过程中温度、应力和徐变的计算机软件．人们可用计算方法来分析、比较各种施工方案以挑选最佳者，还可用它来对大坝建成后的运行进行监控和测算，以保障安全．

7. 资源开发与环境保护　在石油开发中我国数学界进行了长期的工作，参加的单位很多．70年代中期北京大学闵嗣鹤教授等出版了关于石油勘探数字技术的专著，系统地介绍了有关的数学理论和方法．人们分析大量的人工地震的数据，以推断地质的构造，为寻找石油、天然气的储藏位置提供依据；运用数理统计、Fourier 分析、时间序列分析等数学方法，成功地开发了具有先进水平的地震数据处理系统．近年来还用波动方程解的偏移迭加、逆散射等方法处理地震数据．参加这方面工作的先后有中科院计算中心张关泉等课题组，山东大学、清华大学等．南开大学胡国定教授等别开生面地用纯分析方法推导出所谓反褶积预测公式，在南海石油勘探中效果显著．

在石油开发的重要手段——测井资料解释方面，复旦大学等建立了电阻率测井的偏微分方程边值问题的模型，研制了高效能的数值方法，并据此进行优化设计、制造了新的测井仪器．采用此仪器和解释方法可发现容易忽视的薄夹层油层，以减少资源浪费．此仪器已被国内十多个油田采用，节省了几百万美元的进口外汇．应用数学所开展不稳定试验方法评价油藏特征研究，采用解微分方程和优化相结合的办法，成功地估计油气储藏量以及油井到油藏边界的距离，对新疆塔里木盆地雅克拉地区中生界油气的富集取得了明显的地质效果．北京大学数学系用三维有限元方法，对大庆油田地层滑移建立数学模型并模拟，据此以预报和预防，这样可减少损失．

水资源的研究十分重要．清华大学等建立了各种地层结构的数学模型，利用有限元方法计算地下水资源，建立了一套地下水资源评价的理论和方法；用于河南商丘和南京仙鹤门等地取得了实际效益，并在农田灌溉及理论研究上得到许多成果．云南大学

统计系利用三维趋势分析，通过电子计算机模拟显示，拟合云南某矿区铅锌矿带分布方向、矿体定向位置，预测出三个成矿地段；同时指出东南方向矿藏变薄，从而及时撤回对该地段的勘探，避免了浪费. 他们探矿的两篇论文发表在美国《Mathematical Geology》杂志上，法国、瑞典曾来函购买计算程序. 此外，他们还建立了水生细菌生态学的数学模型，找出了 EI. Tor 弧菌的最佳和最劣生长条件及生长规律，肯定了此种菌能越冬生长.

在环境保护与预防自然灾害方面，李国平教授发表过《数理地震学》专著. 其他有关运用数学方法进行预报的书也不少见.

数学工作者对江、湖、河口的污染扩散，土壤洗盐等问题成功地进行了分析和模拟；对北京、天津、成都等城市的交通、管理、自然条件和社会的容纳力作了深入的研究、预测和评价. 例如，上海市关于地面沉降及地下储能的探讨，山东大学对西安市地下水污染模拟及预测，都是值得称道的工作.

8. 农业经济 中国科学院武汉数学物理研究所在分析了我国传统的生态农业思想与人类开发关系等问题之后，提出了一个生态农业经济发展及整治的理论框架与行动措施，以图高产、优质、高效来增加农民收入. 他们建立了 18 个数学模型，其中包括：一般水环境整治与扩建，水电能源的投入产出与经济系统的优化、林业开发、土地资源开发等优化模型.

中国科学院系统所王毓云运用数学、生物、化学与经济学交叉的研究成果，建立了黄淮海平原农业资源配置的数学模型. 按照模型计算，制定了黄淮海五省二市的资源配置规划. 通过十年实施，农业发生了巨变. 此项研究获得了国家重大攻关奖及国际运筹学会荣誉奖.

曲阜师范大学运筹学研究所长期面向农业，他们先后与山东省 23 个县市的农业部门合作，取得了经济和社会效益. 他们运用线性规划、对策论、参数规划等数学工具，为长清县种植业和畜牧业制定最优的结构布局方案；采用模糊聚类分析方法，建立了桓台县水产业最优结构的模型；为郯城县剩余劳力提出了合理转

移方案；根据陵县的农业生态环境，建立了“盐、碱、荒地”、“低产田”、“中产田”开发治理的优化模型；为济南市的蔬菜产销结构，畜禽结构提出最优方案，都已为济南市有关部门所采用和执行.

9. 机器证明 计算机能进行高速计算，此为人所共知. 计算机也能证明几何定理吗？这是关系到人类智能大大扩展和解放的大问题. 1976 年吴文俊教授开始进行研究，并在很短的时间内取得了重大突破. 他的基本思想如下：引进坐标，将几何定理用代数方程组的形式表达；提出一套完整可行的符号解法，将此代数方程组求解. 此两步中，一般第二步更为困难. 周咸青利用和发展吴文俊方法，编制出计算机软件，证明了 500 多条有相当难度的几何定理，并在美国出版了几何定理机器证明的专著. “吴方法”不仅可证明已有的几何定理，而且可以自动发现新的定理；可以从 Kepler 定律推导牛顿定律；解决一些非线性规划问题；给出 Puma 型机器人的逆运动方程的解. 吴文俊教授还将其方法推广到微分几何定理的机器证明上.

10. 新计算方法 近年来国内研制出多种新的算法，具有很高的水平. 中科院计算中心冯康研究组提出哈密尔顿系统的辛几何算法，获得了远优于现有其他方法的效果. 研究成果在天体力学、等离子体流体力学、控制论等领域有现实应用或潜在应用，此工作获得中科院自然科学一等奖.

有限元分析的最主要的位移模式中通常使用两种元，即协调元与非协调元. 后者具有更高的精确度，但收敛性较难保证. 石钟慈研究了非协调元收敛性的各种性质，建立了收敛判别法；证明了许多种极有应用价值的非协调元的收敛性等等.

早在 70 年代，华罗庚、王元两教授开展了近代数论方法在近似分析中应用的研究，对多重积分的近似计算，卓有成效，被称为“华-王方法”，其理论基础是数论中的一致分布论. 近年来，王元与方开泰合作，发展了此方法并应用于数理统计，推广了“均匀设计法”，与通常“正交设计法”相比可减少试验次数，节省工

作量与经费的 2/3. 此方法已在航天部有关单位使用. 四川大学柯召教授等在不定方程的研究中,以及徐利治教授在近似计算中,也都有很好的工作.

计算中心余德浩在自然边界元方法和自适应边界元方法研究中,得到了系统完整的成果,开辟了边界元研究的新方向,获得中科院自然科学一等奖.

北京大学数学系应隆安教授等独立于西方发展了无限元计算方法,20 年来主要用于两方面:应力强度因子的计算和流体计算. 用此种计算法以计算方腔流,在角点处得到了无穷多个向角点收缩的涡旋,这是用其他方法所得不到的.

北京大学张恭庆教授对无穷维 Morse 理论与方程的多重解;计算中心袁亚湘对非线性规划的理论和算法,都取得重要研究成果.

计算是我国古代数学家的特长,例如祖冲之计算圆周率的巧妙算法,达到当时数学的顶峰. 中科院系统研究所林群教授创立了"最优剖分"方法,发扬了祖冲之的优良传统. 他发现部分的形状可以决定计算的成败,因而必须选择最优剖分. 这一成果被国际同行高度评价;获中科院自然科学一等奖;并在我国及巴基斯坦的核电站中使用.

为了便于概率统计计算,计算中心制成"随机数据统计分析软件包"(简记为 SASD),在科研、教学、生产、管理等方面发挥重要作用,至今已有 200 多个单位购买和安装了 SASD. 此外,软件研究所陶仁骥等人在自动化方面的工作,也取得了重要进展.

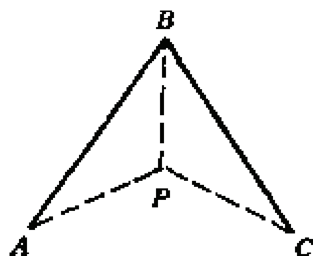
11. 数学物理 数学与物理是联系最紧密的两门科学. 本篇所说的数学物理只是指数学在物理中的应用. 这方面人才济济,许多优秀的数学家都做过与物理有关的研究工作. 中科院武汉数学物理研究所主编的《数学物理学报》,为推动数学物理的研究起了很大作用. 南开数学研究所在这方面的研究中成绩显著. 复旦大学谷超豪教授研究规范场的数学理论,发表了《经典规范场理论》等专著,目前他正致力于非线性数学的研究. 周毓麟教授关

于深水波的传播方程以及非线性伪抛物型方程、丁夏畦教授关于等熵气流方程的初值问题以及廖山涛教授对动力系统的深刻研究，都来源于物理或与物理紧密相关．陆启铿教授等将旋量分析运用于引力波，在引力波场方程求解方面获得成功的结果．

孤立子是非线性波动方程的一种具有粒子性状的解，它是由数学家首先发现的；它的发现及相应的数学理论的发展是当今数学的一件大事，在基本粒子、流体力学中有广泛应用．复旦大学胡和生教授对孤立子与微分几何中若干问题进行研究，得到系统的成果．计算中心屠规彰等研究了非线性波方程的不变群守恒律、贝克隆变换等；解决了一类重要的非线性演化方程守恒律个数的猜想．计算中心孙继广对广义特征值的扰动理论找到了一条好的研究途径，得到了一系列扰动定理，并解决了 Moler 等人提出的几个问题．上述计算中心三项工作均获得中科院科技成果一等奖．

12．最短网络 1990 年，应用数学所研究员堵丁柱与美籍华人黄光明合作，证明了有关网络路线最短的一个猜想（Pollak-Gilbert 猜想，1968 年提出），在美国离散数学界引起轰动，被列为 1989—1990 年度美国离散数学界与理论计算机科学界中的两项重大成果之一．设$\triangle ABC$为等边三角形，连接三顶点的路线（称为网络）．这种网络有许多个，其中最短路线者显然是两边之和（如 $AB\cup AC$）．但若允许加新点 P，连接 4 点的新网络之路径长为 $PA+PB+PC$．最短新路径之长 N 比原来只连三点的最短路径 O 要短．推广到任何 n 点（不必成等边形），上述猜想为

$$\frac{N}{O}\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 86.6\%$$



此猜想持续 22 年，是贝尔实验室一直关注的难题．它在供电线路设计、计算机电路设计中都有应用，无怪乎解决后引起强烈反响．

13. 几何设计 用计算机作为辅助工具制作影片，是一有趣的新课题，其中用到计算几何学与分形（Fractal）几何的知识和方法．北方工业大学 CAD 研究中心完成三项成果：

a．1990 年亚运会期间，首次在我国把电脑三维动画搬上银幕，作成亚运会体育大舞台电影片的片头，继而又完成 14 个节目头；为中央电视台制作新闻联播片头；1991 年春节前，完成国内第一部电脑卡通寓言电视片《咪咪钓鱼》．

b．1992 年完成国内第一部全电脑制作的科教片《相似》；被评为"它在中国电影技术发展史上有重要影响"的事件．

c．利用计算机制作三维动画广告多个．

14. 模糊推理 人脑能从模糊的观察对象提炼出有用的甚至精确的信息，即使对象蒙上伪装也能识别，这是计算机所望尘不及的．大脑的这种卓越的功能真令人惊叹不已．**模糊数学研究的正是模糊的对象．请不要误以为这种数学本身是模糊的、不精确的**．北京师范大学汪培庄教授等从事模糊数学的理论和应用的研究．基于他们自创的理论，研究成功国际上第二台模糊推理机．推理速度比日本的第一台（1987 年 7 月推出）提高 50%，而样机体积只有它的 1/10．随后又研制成功总线级推理机，达到了标准化和通用化．在家用电器方面，开发成功模糊空调器、模糊电冰箱等．在工业应用方面，制成"电气化铁路输电线几何参数图象识别系统"，"心肺功能数据处理系统"以及为首钢制造的"给水系统模糊控制器"等．

我国研究模糊数学而且成绩显著者还有四川大学刘应明、陕西师大王国俊等教授．

15. 军事与国防 上面已提到，我国所以能在很短时间内制成原子弹、氢弹和其他先进武器，发射火箭与卫星，是由于许多优秀科技工作者的共同努力，其中也凝聚着数学家的劳动和智慧，他们的贡献暂时默默无闻，然而必将永照史册．

运用数学对重要信息加密或破密，形成一门新的应用数学——密码学，即密码分析与讯息安全设计．北京大学段学复教授

等对此进行了长期研究，他们的成果对于一类重要的特殊情况能提高计算时效 2000 倍；此外，还开设了几届进修班．系统研究所万哲先研究员等人相互独立同时完成对移位寄存器序列的理论，进行了潜心的研究，他们的成果丰富了线性及非线性移位寄存器序列的理论，在保密通信中有重要应用；再者，他们运用典型群方法，进行了认证码的构作，这也是保密通信的一个重要方面．以上段、万两位的工作都得到高度评价和奖励．中国科技大学曾肯成等对密码分析及讯息安全保护，也做了重要的工作．

在刑事案件中，常遇到被烧毁的纸灰，如能利用它以鉴别纸张类型，对侦破有时有重要意义．云南大学统计系利用聚类分析、判别分析等统计方法，做了这方面的研究，据此侦破案件多起而获奖．

曲阜师范大学自动化研究所运用系统辨识等方法制成重烧伤输流电脑测算仪，提高了对烧伤病人的医护水平．此仪器已为四所军医大学及其他单位所采用，并获中国人民解放军科技进步二等奖．

16. 其他 数学应用多种多样．北京大学黄敦教授与杨淳等研究冲击波及滑流的四种数值概型，得到很好的结果．计算物理学家用 Monte-Carlo 方法计算了子宫颈癌腔内放射治疗剂量的分布，既准确又简便，提高了治疗效果．国外提出了几种艾滋病的数学模型，如 HIV/AIDS 传播动态模型、危险行为模型等；对肿瘤也有数学模型，如 Mendelson 模型、Gompertz 模型等．关于卫生保健，云南大学对云南省学生体质进行了调查，形成了“体调数据库”，建立了“指标综合数学模型”等．

28.4 为数学强国而奋斗

三年前在南开大学举行的“21 世纪中国数学展望”会上，陈省身教授及与会的数学家都认为，数学是我国人民擅长的学科，我

国完全有希望在21世纪前期成为数学大国、数学强国；他们还提出：数学应该率先赶超国际先进水平．的确，我国古代数学有过辉煌的成就；近几百年由于封建社会政治腐败和帝国主义侵略，数学落后了．新中国诞生后，我国数学有了很大的发展．在1956年科学发展规划的指导下，建立和发展了微分方程、概率统计、计算数学、泛函分析、多复变函数论、运筹学、控制论等分支学科．到1965年，我国数学的基础研究已具有相当规模，并且有自己的特色，在国际上有一定地位．我国的《数学学报》曾被美国全部译成英文出版．"十年动乱"中，数学研究受到严重破坏．改革开放以来，数学界恢复了活力，国内的学术风气非常活跃，陈景润、王元、潘承洞等在数论和杨乐、张广厚等在函数论的优秀成果饮誉国际，从而大大鼓舞了士气．研究队伍和方向也进行了重新组合和调整，一批新的数学研究所（如南开数学研究所）相继建立．国外来访的专家讲学频繁，同时我国也有不少专家到国外讲学或参加国际学术会议．大批的中、青年学者则以访问、进修或攻读学位的方式出国留学．学术上的内外交流沟通了信息，提高了水平．更令人欣喜的是，一批优秀的青年博士学成回国，开始填补若干重要的空白领域如代数几何等；国内自己培养的博士也逐渐崭露头角，研究工作出色者大有人在．原先有较强实力的领域，如数理逻辑、数论、代数、函数论、拓扑学、微分几何、微分方程、泛函分析、概率统计、控制论、运筹学、计算数学等，以及起步较晚的一些学科，如代数数论、代数几何、非线性泛函分析、动力系统、整体微分几何、随机分析、机器证明和模糊数学等，都在近年内做出了达到或接近国际先进水平的成果．最近两届国际奥林匹克数学竞赛，我国连获团体冠军，个人金牌数也名列前茅，消息传来，全国振奋．我国数学，现在有能人，后继有强手，国内外华人无不欢欣鼓舞．

然而另一方面也必须看到，从整体上看，我国数学研究的水平与世界先进国家相比，还有相当差距．另一严重情况是，到2000年，高校数学师资将面临严重短缺．以高校理科而言，现有数学

教师约 24000 人，到 2000 年若有 55%退休，即退休 13200 人，那么，即使以全部研究生补缺，仍短少约 2000 人．因此，必须吸引更多年轻人学习数学．

为了使数学更健康地发展，更好地为社会主义建设服务，特提出下列建议：

首先，在指导思想方面，**提倡“全面发展，重点扶持、办出特色”**．发展科学文化，“百花齐放、百家争鸣”的方针是正确的．数学中子学科繁多，而且不断有新学科出现，每门新学科的发展前途，难以逆料．因此，应该给各学科以充分发展的机会，在发展中竞争．**所谓重点，是指那些对科学发展或实际应用已逐步展示其重要作用的学科或项目，如非线性数学、计算数学、计算机数学、离散数学的某些方面，数学物理、数学的其他边缘学科、概率统计等**．对重点学科，应给以较大扶持．任何一个国家都不可能在数学的各方面都领先．为了赶超国际先进水平，只能重点突破；在某几个学科或项目上率先突破，这就必须有我国自己的特色．特色是什么？这是一个值得深入研究的大问题．

其次，空气哺育万物而自身无赏；同样，**数学教育众人而报酬极低**；桃李无言，下自成蹊．另一方面，学习数学又难，成为拔尖人物更难．无怪乎现代青年人大都不愿学数学，即使有数学天才者也避而远之；奥林匹克竞赛优胜少年，又有几人立志数学？这实在令人感叹而忧伤．**要区别对待各类人才**．对有成就的数学家，要更好发挥他们的作用，在社会地位、生活待遇上有一定优先，因为他们的今天是青少年的明天，对青少年起着示范和吸引作用；对达到国际第一流水平的学者应重金聘请；对博士，无论国外或国内培养者要同样待遇，今后逐步过渡到以国内培养为主，惜乎现在博士生源枯衰，报考者寥寥无几．要多吸引优秀青年学成后回国工作．国家自然科学基金会每年举办数学讲习班，请留学国外的博士回来短期讲学，效果很好，是一创举，如能提供单程国际机票，则会吸引更多学子回来．对 30 岁左右学业有成的学者，需提供条件，使其在工作、出访、职称、生活等方面均能得

到相应的待遇，以便早日脱颖而出．中小学数学教学，既要有科学性，又要有趣味性，以提高青少年学数学的兴趣．对成绩优秀者，给以奖励，奥林匹克金牌获得者应予重奖，金额应接近体育金牌获得者．

第三，数学研究设备虽比较少，但计算机、图书资料、国内外交流、人才培养等都需要大量经费，**“一支笔、一张纸”的研究方式已成历史**．应大力开辟财源，除国家拨款外，国家自然科学基金对数学与物理的资助以 1∶3 为宜．社会名流、企业和财团的支持应是一重要财源．这方面开发得还很不够，应对他们进行宣传，给予技术帮助，使他们从中获益，从而体会到数学的好处．

第四，学科的强大生命力在于对社会进步的贡献．数学也不例外．**数学的贡献在于对整个科学技术（尤其是高新科技）水平的推进与提高，对科技人才的培养和滋润，对经济建设的繁荣，对全体人民的科学思维与文化素质的哺育，这四方面的作用是极为巨大的，也是其他学科所不能全面比拟的**．数学工作者应主动联系实际，了解与数学有关的各种问题．同时也希望社会各界人士多予关注、支持与帮助，多与数学界合作，主动提出各种咨询，以使数学科学更深入地扎根于实际，为我国的社会主义建设多作贡献．

参考文献

[1] 国家自然科学基金委员会．自然科学学科发展战略研究报告之七：数学．科技导报，1992，11：35～38

[2] 石钟慈，杜文庄．计算：第三种科学方法．科学，1992，5：12～15

[3] 李大潜等．努力发展中国的工业与应用数学．1992（“中国工业与应用数学学会”第二次大会会议报告）．

[4] Glimm J G．数学科学·技术·经济竞争力．天津：南开大学出版社，1991．

[5] Lax P D．应用数学在美国的蓬勃发展．数学译林．1992，1：56～63

关于各篇的注

第一卷　生灭过程理论

第 1 篇　本篇内容取自论文：Классификация всех процессов размножения и Гибели. Научние доклады вышей школы，Физ-Матем. Науки. 1958，4：19—25. 收稿日期：1958—05—19. 论文的作者单位署名：莫斯科大学. 该文是作者在国立莫斯科大学的副博士学位论文摘要. 该文无中文稿，本篇中文稿由杨向群译出.

第 2 篇　本篇内容取自论文：生灭过程构造论. 数学进展，1962，5 (2)：137—170. 收稿日期：1962—01—09. 修改稿收到日期：1962—03—20. 论文的作者单位署名：南开大学. 该论文是作者在莫斯科大学的副博士学位论文的详细内容，也是上述第 1 篇中论文的详细证明，详细地阐述了由作者创立的，马尔可夫过程构造论中的概率方法——过程轨道极限过渡法——的逻辑基础. 作者用此方法彻底地解决了生灭过程的构造问题. 本篇中的第 10 节是这次新加的.

第 3 篇　本篇内容取自论文：一个生灭过程. 科学纪录，1959，新辑 3 (8)：266—268. 收稿日期：1959—06—02. 英文稿刊于：Chinese Science Record，1959，New ser. 3 (8)：331—334. 收稿日期：1959—06—02. 论文的作者单位署名：南开大学.

第 4 篇　本篇内容取自论文：生灭过程的遍历性与零壹律. 南开大学学报(自然科学)，1964，5(5)：89—94. 收稿日期：1964—

02—07. 论文的作者单位署名：南开大学.

第5篇　本篇内容取自论文：On distributions of functionals of birth and death processes and their applications in the theory of queus. Scientia Sinica，1961，X（2）：160—170. 收稿日期：1960—09—15. 论文的作者单位署名：南开大学. 论文无中文稿，本篇中文稿由杨向群译出.

第6篇　本篇内容取自论文：生灭过程停留时间与首达时间的分布. 中国科学，1980，（2）：109—117. 收稿日期：1979—01—04. 英文稿刊于：Scientia Sinica，1980，XIII（3）：269—279. 收稿日期：1979—01—15. 论文的作者单位署名：南开大学.

第7篇　本篇内容取自论文：生灭过程理论的若干新进展. 论文的作者单位署名：南开大学. 该论文收集于《天津市数学研究成果选编》第1至7页，天津市数学会编，天津科技出版社，1983.

第二卷　随机泛函分析

第8篇　本篇内容取自论文：随机泛函分析引论. 数学进展，1962，5（1）：45—71. 论文的作者单位署名：南开大学. 该论文是国内第1次较系统地论述随机泛函分析的论文. 论文中第3章是作者得到的结果，系首次发表.

第三卷　马尔可夫过程的通性

第9篇　本篇内容取自论文：马尔可夫过程的零壹律、数学学报，1965，15（3）：342—353. 收稿日期：1963—04—08. 修改稿收到日期：1964—11—27. 论文的作者单位署名：南开大学. 论文被美国数学会翻译成英文发表于：Chinese Mathematics (Amer. Math. Society). Acta Mathematica Sinica. 1965，15（3）：342—353.

第10篇　本篇内容取自论文：常返马尔可夫过程的若干性质. 数学学报，1966，16（2）：166—178. 收稿日期：1964—01—

24；修改稿收稿日期 1965—01—27. 论文的作者单位署名：南开大学. 论文被美国数学会译成英文发表于：Chinese Mathematics (Amer. Math. Society), Acta Mathematica Sinica, 1966, 16 (2): 166—178.

第 11 篇　本篇内容取自论文：暂留马尔可夫过程向无穷远的徘徊. 北京师范大学学报（自然科学版），1986，(3)：21—24. 收稿日期：1986—01—20. 论文的作者单位署名：北京师范大学.

第 12 篇　本篇内容取自论文：扩散过程在随机时间替换下的不变性. 南开大学学报（自然科学版），1964，5 (5)：1—7. 收稿日期：1964—01—30. 论文的作者单位署名：南开大学.

第 13 篇　本篇内容取自论文：The Martin boundary and limit theorems for excessive functions. Scientia Sinica, 1965, XIV (8): 1118—1129. 收稿日期：1965—01—13. 论文的作者单位署名：南开大学. 该文无中文稿，本篇中文稿由杨向群译出.

第 14 篇　本篇内容取自论文：Markov 过程的若干联合分布. 科学通报，1996，41 (10)：885—869. 收稿日期：1995—08—30. 论文的作者单位署名：汕头大学，北京师范大学.

第 15 篇　本篇内容取自论文：随机激发过程对地极移动的作用. 地球物理学报，1978，21 (3)：225—233. 收稿日期：1977—01—19. 论文的作者单位署名：南开大学.

第四卷　物理学中的随机过程理论

第 16 篇　本篇内容取自论文：物理学中的随机过程. 北京师范大学学报（自然科学），1992，28 (4)：446—453. 收稿日期：1992—06—15. 论文的作者单位署名：北京师范大学.

第 17 篇　本篇内容取自论文：布朗运动的末遇分布与极大游程. 中国科学，1980，(10)：933—940. 收稿日期：1979—12—28. 英文稿刊于：Scientia Sinica, 1981, XXIV (3): 324—331.

收稿日期：1979—12—28. 论文的作者单位署名：南开大学.

第18篇　本篇内容取自论文：布朗运动首中与末离的联合分布. 科学通报，1994，39(13)：1168—1173. 英文稿刊于：Chinese Science Bulletin，1995，40(6)：451—457. 论文的作者单位署名：汕头大学，北京师范大学.

第19篇　本篇内容取自论文：对称稳定过程与布朗运动的随机波. 中国科学A辑，1982，(9)：801—806. 收稿日期：1981—09—18. 英文稿刊于：Scientia Sinica (series A)，1983，XXVI(1)：35—42. 收稿日期：1981—09—18. 论文的作者单位署名：南开大学.

第20篇　本篇内容取自论文：两参数Ornstein-Uhlenbeck过程. 数学物理学报，1983，3(4)：395—406. 收稿日期：1982—01—10. 英文稿刊于：数学物理学报外文版，Acta Mathematica Scientie 1984，4(1)：1—12. 收稿日期：1982—01—04. 论文的作者单位署名：南开大学. 该论文是作者为庆贺李国平教授从事教育和科学工作五十周年而作，是国际上第1次讨论多参数Ornstein-Uhlenbeck过程(OUP_n)的论文. 在国外，两参数OU过程最早于1984年在下列文献中引进：Walsh J. An introduction to stochastic partial differential equations. In：Ecole d'été de probabilitiés de saint-flour XIV-1984 (Lect. Notes Math. vol. 1180，第266—437页，Berlin：springer，1986). 详见 Probability Theory and Related Fields，1995，103(1)，第40页及第63页，及其中所引的参考文献. 如果在本书第20篇的OUP_2的定义(2.3)式中，积分下限0改为$-\infty$，并取$X_0=0$，$\alpha=\beta=1$，$\sigma=2$，则Walsh的定义是(2.3)的特例.

第21篇　本篇内容取自论文：两参数Ornstein-Uhlenbeck过程的转移概率及预测. 科学通报，1986，31(23)：1761—1764. 收稿日期：1986—02—16. 英文稿刊于：Kexue Tongbao，1988，33(1)：5—9. 收稿日期：1986—08—07. 论文的作

者单位署名：北京师范大学.

第22篇　本篇内容取自论文：多参数无穷维OU过程与布朗运动. 数学物理学报，1993，13(4)：455—459. 收稿日期：1991—07—17. 论文的作者单位署名：北京师范大学. 这也许是多参数无穷维随机分析的最早的论文，以前还未见到这方面的文章.

第23篇　本篇内容取自论文：多参数无穷维（r，δ）-OU过程. 科学通报，1998，43（15），1595—1599. 收稿日期：1997—12—08. 作者当时的工作单位：北京师范大学，汕头大学. 在（r，δ）-OU过程的定义式（1）中，取$r=-\infty$，$\delta=-\infty$并在有限维的情形下，即可得到Walsh的OUP_2的定义，见上面的第20篇的注.

第24篇　本篇内容取自论文：两参数正态过程的马尔可夫性. 科学通报，1992，37（15）：1345—1347. 收稿日期：1990—07—25. 修改稿收到日期：1992—04—07. 英文稿刊于：Chinese Science Bulletin，1992，37（21）：1761—1764. 收稿日期：1990—07—25. 修改稿收到日期：1992—04—07. 论文的作者单位署名：北京师范大学.

第25篇　本篇内容取自论文：超过程的幂级数展开. 数学物理学报，1990，10（4）：361—364. 收稿日期：1990—02—10. 论文系为庆祝李国平教授八十寿辰而作. 论文的作者单位署名：北京师范大学.

第26篇　本篇内容取自论文：论随机性. 北京师范大学学报（自然科学版），1990，27（1）：119—127. 收稿日期：1990—08—23. 论文的作者单位署名：北京师范大学.

第五卷　混沌与随机

第27篇　本篇内容取自论文：论混沌与随机. 北京师范大学学报（自然科学版），1994，30（2）：199—202. 收稿日期：1994—02—22. 论文的作者单位署名：北京师范大学，汕头大学.

第六卷　今日数学

第 28 篇　本篇内容取自论文：今日数学及其应用．数学通报，1994，(7)：0—12．该刊对此论文加了编者按语："这是王梓坤院士执笔为中国科学院数学物理学部写的报告．对数学在国富民强中的意义，用大量数学中的成就和精辟的分析作了雄辩的论证，对数学科学和数学教育的发展都有重要的指导意义．本刊征得作者同意，特在此公开发表．"论文还收集于严士健教授主编的书《面向 21 世纪的中国数学教育——数学家谈数学教育》第 1 至 34 页中，该书于 1994 年由江苏教育出版社出版．本篇更早发表于中国科学院院刊，1994，1，13—17；自然辩证法研究，1994，1，3，—17；以及一些日报上．

·索 引·

（8，8：1，8：1.1 分别表示第 8 篇，第 8 篇的 1，第 8 篇的 1.1）

B

G

H

J

K

L

M

N

O

P

Q

R

S

T

W

X

Y

Z